01 Notions de logique – 1BAC Sciences Économiques

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Reconnaître une proposition, employer correctement les connecteurs et les quantificateurs, nier un énoncé et conduire les raisonnements exigibles en 1BAC Sciences Économiques.

Table des matières

1 Propositions et valeurs de vérité . . . 2
2 Connecteurs logiques . . . 2
Formules fondamentales . . . 2
3 Implication, réciproque et contraposée . . . 2
4 Quantificateurs . . . 2
Négation d'un énoncé quantifié . . . 3
5 Méthodes de raisonnement . . . 3
Raisonnement direct . . . 3
Contraposée . . . 3
Absurde . . . 3
Disjonction de cas . . . 3
Contre-exemple . . . 3
6 Raisonnement par récurrence . . . 3
Principe de récurrence . . . 3
7 Erreurs fréquentes . . . 3

1 Propositions et valeurs de vérité

Définition

Une **proposition** est un énoncé auquel on peut attribuer exactement une valeur de vérité : vraie ou fausse. Une phrase contenant une variable libre devient une proposition lorsque la variable est fixée ou quantifiée.

Deux propositions sont **équivalentes** lorsqu'elles ont toujours la même valeur de vérité. On note cette équivalence $P \iff Q$.

2 Connecteurs logiques

Soient P et Q deux propositions.

Écriture	Lecture	Condition de vérité
$\neg P$	non P	P est fausse
$P \wedge Q$	P et Q	P et Q sont vraies
$P \vee Q$	P ou Q	au moins l'une est vraie
$P \Rightarrow Q$	si P, alors Q	fausse seulement si P est vraie et Q fausse
$P \iff Q$	P si et seulement si Q	P et Q ont la même valeur

Propriété *Formules fondamentale*

$$P \Rightarrow Q \iff (\neg P) \vee Q, \qquad \neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q),$$
$$\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q), \qquad P \iff Q \iff (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P).$$

3 Implication, réciproque et contraposée

Pour $P \Rightarrow Q$:

- P est une condition suffisante de Q ;
- Q est une condition nécessaire de P ;
- la réciproque est $Q \Rightarrow P$;
- la contraposée est $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Propriété

Une implication et sa contraposée sont équivalentes :

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q \Rightarrow \neg P).$$

L'implication n'est pas, en général, équivalente à sa réciproque.

4 Quantificateurs

Définition

$\forall x \in E,\ P(x)$ signifie que $P(x)$ est vraie pour tout élément de E
vérifie $P(x)$. $\exists! x \in E,\ P(x)$ signifie qu'un unique élément de E vé

Soit $P(x)$ une propriété définie sur un ensemble E.
L'ordre des quantificateurs est essentiel. Les énoncés $\forall x\, \exists y$ et $\exists y\, \forall x$ n'expriment pas la même idée.

Propriété *Négation d'un énoncé quantifi*

$$\neg(\forall x \in E,\ P(x)) \iff \exists x \in E, \neg P(x),$$
$$\neg(\exists x \in E,\ P(x)) \iff \forall x \in E, \neg P(x).$$

La négation de $\forall x \in E,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$ est $\exists x \in E,\ P(x) \wedge \neg Q(x)$.

5 Méthodes de raisonnement

Méthode *Raisonnement direct*

On suppose l'hypothèse P vraie, puis on enchaîne des implications justifiées jusqu'à obtenir Q.

Méthode *Contraposée*

Pour prouver $P \Rightarrow Q$, on peut établir l'énoncé équivalent $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Méthode *Absurde*

On suppose simultanément l'hypothèse et la négation de la conclusion ; une contradiction permet de rejeter cette supposition.

Méthode *Disjonction de cas*

On partage toutes les situations possibles en cas incompatibles, puis on prouve la conclusion dans chacun d'eux.

Méthode *Contre-exemple*

Pour réfuter $\forall x \in E,\ P(x)$, il suffit de trouver un élément $a \in E$ tel que $P(a)$ soit fausse.

6 Raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une propriété définie pour tout entier $n \geq n_0$.

Propriété *Principe de récurrenc*

Si $P(n_0)$ est vraie et si, pour tout $k \geq n_0$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Une rédaction complète distingue l'initialisation, l'hérédité et la conclusion. Durant l'hérédité, $P(k)$ est une hypothèse temporaire et non un résultat déjà établi pour tout k.

7 Erreurs fréquentes

- Confondre une implication avec sa réciproque.
- Nier $P \Rightarrow Q$ par $\neg P \Rightarrow \neg Q$ au lieu de $P \wedge \neg Q$.
- Oublier de changer $\forall$ en $\exists$, ou inversement, lors d'une négation.
- Employer un calcul particulier pour prétendre prouver un énoncé universel.
- Commencer une récurrence sans préciser le premier rang.

À retenir

La logique fixe le sens exact des énoncés. Avant toute preuve, identifier les hypothèses, la conclusion, le domaine des variables et les quantificateurs.