04 Suites numériques – 1BAC Sciences Économiques

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Définir et représenter une suite, prouver des propriétés par récurrence, étudier monotonie et bornes, puis maîtriser les suites arithmétiques, géométriques et leurs sommes.

Table des matières

1 Définition et modes de génération . . . 2
2 Représentation et lecture . . . 2
3 Suites majorées, minorées et bornées . . . 2
4 Monotonie . . . 2
5 Suites arithmétiques . . . 2
6 Suites géométriques . . . 3
7 Suites définies par une relation affine . . . 3
8 Taux d'évolution répétés . . . 3
9 Erreurs fréquentes . . . 3

1 Définition et modes de génération

Définition

Une suite numérique est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$. Son image au rang n est notée u_n.

Une suite peut être définie explicitement par $u_n = f(n)$, ou par récurrence à l'aide d'un premier terme et d'une relation $u_{n+1} = F(u_n)$. Pour une suite récurrente, chaque terme dépend des précédents ; il faut donc conserver exactement le rang initial.

2 Représentation et lecture

Les points (n, u_n) donnent une représentation discrète. Pour $u_{n+1} = F(u_n)$, on peut utiliser les courbes $y = F(x)$ et $y = x$ afin de construire graphiquement les termes successifs. Un tableau de valeurs ne démontre pas une propriété valable pour tout rang, mais il peut guider la recherche.

3 Suites majorées, minorées et bornées

Définition

La suite (u_n) est majorée s'il existe M tel que $u_n \leq M$ pour tout rang. Elle est minorée s'il existe m tel que $m \leq u_n$ pour tout rang. Elle est bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Pour établir qu'un intervalle est stable par F, on vérifie que $x \in I \Rightarrow F(x) \in I$, puis on utilise une récurrence à partir du premier terme.

4 Monotonie

Propriété

Pour étudier les variations d'une suite, on peut :

- déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- si les termes sont strictement positifs, comparer u_{n+1}/u_n à 1 ;
- lorsque $u_n = f(n)$, utiliser les variations de f sur l'intervalle correspondant.

Une suite croissante satisfait $u_{n+1} \geq u_n$ à tout rang. Une suite décroissante satisfait l'inégalité opposée.

5 Suites arithmétiques

Définition

(u_n) est arithmétique de raison r si $u_{n+1} = u_n + r$. Pour tous rangs p et n,

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

La suite est croissante si $r > 0$, constante si $r = 0$ et décroissante si $r < 0$. Pour $p \leq n$:

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n - p + 1)\frac{u_p + u_n}{2}.$$

6 Suites géométriques

Définition

(u_n) est géométrique de raison q si $u_{n+1} = qu_n$. Pour tous rangs p et n,

$$u_n = u_p q^{n-p}.$$

Pour $q \neq 1$ et $p \leq n$:

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

Lorsque $q = 1$, la somme comporte $n - p + 1$ termes égaux à u_p.

7 Suites définies par une relation affine

Considérons $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$. Le point fixe ℓ vérifie $\ell = a\ell + b$, donc $\ell = b/(1 - a)$. En posant $v_n = u_n - \ell$, on obtient

$$v_{n+1} = av_n.$$

La suite (v_n) est géométrique, ce qui donne une expression explicite de u_n.

8 Taux d'évolution répétés

Une hausse de taux t correspond au coefficient multiplicateur $1 + t$; une baisse de taux t correspond à $1 - t$. Si le même coefficient q est appliqué à chaque période, les valeurs forment une suite géométrique. Les taux successifs ne s'additionnent pas : les coefficients multiplicateurs se multiplient.

9 Erreurs fréquentes

- Confondre le rang n avec le nombre de termes d'une somme.
- Employer $u_n = u_0 + nr$ lorsque le premier terme est u_1.
- Oublier le cas $q = 1$ dans une somme géométrique.
- Déduire la monotonie d'une suite récurrente d'une simple liste de valeurs.
- Additionner des pourcentages successifs au lieu de multiplier les coefficients.

À retenir

Avant d'utiliser une formule, repérer le premier rang, le premier terme et le nombre exact de termes. Pour une récurrence affine, soustraire le point fixe transforme le problème en suite géométrique.