SÉRIE D'EXERCICES

2ème Bac Sciences Mathématiques

lycee.mathtutor.ma

Calcul intégral

EXERCICE N°1

Calculer :

1. $\int_0^1 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$;
2. $\int_1^e \dfrac{1 + \ln x}{x}\,dx$;
3. $\int_0^{\pi/4} \dfrac{dx}{\cos^2 x}$;
4. $\int_0^1 \dfrac{2x}{1 + x^2}\,dx$;
5. $\int_0^1 x e^{x^2}\,dx$;
6. $\int_0^1 \dfrac{dx}{1 + x^2}$.

EXERCICE N°2

Calculer $\int_1^e \ln x\,dx$, $\int_0^1 x e^{2x}\,dx$, $\int_0^{\pi/2} x \sin x\,dx$ et $\int_0^1 x^2 e^x\,dx$.

EXERCICE N°3

1. Dans $\int_0^1 \dfrac{2x}{(1 + x^2)^2}\,dx$, poser $u = 1 + x^2$.
2. Dans $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$, poser $x = \sin t$.
3. Montrer que $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a - x)\,dx$ pour f continue.

EXERCICE N°4

Pour $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$:

1. Montrer que $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$ sur $[0, 1]$.
2. En déduire un encadrement de I.
3. Améliorer l'encadrement en utilisant $e^{-t} \leq 1 - t + t^2/2$ pour $t \geq 0$.

EXERCICE N°5

$F(x) = \int_1^x \dfrac{(\ln t)^2}{t}\,dt$ sur $]0, +\infty[$.

1. Étudier les variations de F.
2. Calculer $F(x)$ explicitement.
3. Résoudre $F(x) = 2$.
4. Étudier $G(x) = \int_x^{x^2} \dfrac{dt}{t}$.

EXERCICE N°6

Déterminer les limites :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + k/n}, \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (k/n)^2}, \qquad \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\, e^{k/n}.$$

EXERCICE N°7

Déterminer l'aire comprise entre $y = x^2$ et $y = 2x$, puis entre $y = \ln x$ et l'axe des abscisses sur $[1, e]$.

EXERCICE N°8

Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la région sous $y = \sqrt{x}$ sur $[0, 4]$, puis de la région sous $y = e^{-x}$ sur $[0, \ln 2]$.

EXERCICE N°9

Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x}\, dx$.

1. Montrer que (I_n) est positive et décroissante.
2. Établir $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
3. Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n par intégration par parties.
4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

EXERCICE N°10

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$.

1. Montrer que $I_n > 0$ et que (I_n) est décroissante.
2. Établir $0 < I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
3. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
4. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} n I_n$.

EXERCICE N°11

Soit $f(x) = 2 + \cos x$.

1. Calculer $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer la valeur moyenne de f sur une période.
3. Vérifier directement qu'il existe $c \in [0, 2\pi]$ tel que cette valeur moyenne soit égale à $f(c)$.