08 Calcul intégral – Sciences Mathématiques

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Calculer des intégrales, utiliser IPP et changement de variable, traiter sommes de Riemann, aires, volumes et fonctions définies par une intégrale.

Table des matières

1 Définition et interprétation . . . 2
Symétrie . . . 2
Périodicité . . . 2
2 Ordre, valeur absolue et moyenne . . . 2
Nullité d'une fonction positive . . . 3
Valeur moyenne . . . 3
3 Fonction définie par une intégrale . . . 3
Bornes variables . . . 3
4 Techniques de calcul . . . 3
Intégration par parties . . . 3
Intégration par parties . . . 3
Changement de variable . . . 4
Changement de variable . . . 4
5 Sommes de Riemann . . . 4
Reconnaître une somme de Riemann . . . 4
6 Aires et volumes . . . 4
Volume par sections . . . 5
Aire entre deux courbes . . . 5
7 Méthodes de calcul . . . 5
Choisir la bonne technique . . . 5
8 Suites définies par des intégrales . . . 5
9 Aires, volumes et valeur moyenne . . . 5
10 Erreurs fréquentes . . . 5

1 Définition et interprétation

Définition

Si f est continue sur $[a,b]$ et F une primitive de f, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Lorsque $f \geq 0$, cette intégrale est l'aire sous la courbe entre a et b.

Propriété

$$\int_a^a f = 0, \quad \int_b^a f = -\int_a^b f, \quad \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

L'intégrale est linéaire : $\int(\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$.

Propriété *Symétri*

Si f est continue sur $[-a,a]$, alors

$$f \text{ paire} \Longrightarrow \int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,$$

et

$$f \text{ impaire} \Longrightarrow \int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

Propriété *Périodicit*

Si f est continue et de période $T > 0$, alors, pour tout réel a,

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

L'intégrale sur une période ne dépend donc pas du point de départ.

2 Ordre, valeur absolue et moyenne

Propriété

Si $f \leq g$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. De plus,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Si $m \leq f \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

Conséquence *Nullité d'une fonction positiv*

Si f est continue et positive sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \iff f(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in [a,b].$$

Sans l'hypothèse de positivité, une intégrale nulle n'implique pas que la fonction est nulle.

Propriété *Valeur moyenn*

Il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c).$$

La valeur moyenne de f est $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f$.

3 Fonction définie par une intégrale

Propriété

Si f est continue sur un intervalle I contenant a, alors

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$. Si u est dérivable et prend ses valeurs dans I, alors

$$\left(\int_a^{u(x)} f(t)\,dt\right)' = u'(x)f(u(x)).$$

Propriété *Bornes variable*

Si u et v sont dérivables et f continue, alors

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\right)' = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

Cette formule s'obtient en fixant une origine a et en écrivant l'intégrale comme différence de deux primitives.

4 Techniques de calcul

Propriété *Intégration par partie*

Si u et v sont de classe C^1 sur $[a,b]$:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Méthode *Intégration par parties*

Choisir u de sorte que u' soit plus simple, et v' de sorte qu'une primitive v soit immédiate. Pour une puissance de x multipliée par une exponentielle, répéter l'IPP diminue le degré du polynôme. Pour $\ln x$, écrire $\ln x = 1 \times \ln x$ et dériver le logarithme.

Propriété *Changement de variabl*

Si φ est de classe C^1 et f continue :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

Méthode *Changement de variable*

Lorsque $x = \varphi(t)$, remplacer simultanément l'intégrande, $dx = \varphi'(t)dt$ et les bornes. Ne jamais conserver les anciennes bornes après le changement de variable.

5 Sommes de Riemann

Propriété

Si f est continue sur $[a, b]$, alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx.$$

Les sommes à gauche, à droite ou en des points intermédiaires ont la même limite.

Méthode *Reconnaître une somme de Riemann*

Faire apparaître le facteur $1/n$ et écrire le terme en fonction de k/n :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Pour un intervalle $[a, b]$, le pas est $(b-a)/n$ et le point correspondant est $a + k(b-a)/n$.

6 Aires et volumes

Propriété

L'aire comprise entre les courbes de f et g sur $[a, b]$ est

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$

Si $f \geq 0$, le volume obtenu par rotation autour de l'axe des abscisses est

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx.$$

Propriété *Volume par section*

Si un solide possède à l'abscisse x une section d'aire $S(x)$, continue sur $[a,b]$, alors son volume est

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Pour une rotation autour de l'axe des abscisses, $S(x) = \pi f(x)^2$.

Méthode *Aire entre deux courbes*

Résoudre d'abord $f(x) = g(x)$ pour déterminer les points d'intersection, puis étudier le signe de $f - g$. Si le signe change en $c \in]a,b[$, découper :

$$\int_a^b |f-g| = \int_a^c |f-g| + \int_c^b |f-g|.$$

Une aire ne peut jamais être négative.

7 Méthodes de calcul

Méthode *Choisir la bonne technique*

Commencer par simplifier l'intégrande. Chercher ensuite une primitive usuelle, une forme $u'u^n$, u'/u ou $u'e^u$. Utiliser l'intégration par parties lorsque le produit associe un facteur qui se simplifie par dérivation et un facteur facile à intégrer.

8 Suites définies par des intégrales

Pour $I_n = \displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx$, on peut étudier le signe et la monotonie directement sous le signe intégral.

Propriété

Si $0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ sur $[a,b]$, alors $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. Un encadrement uniforme $0 \leq f_n(x) \leq \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$ donne $0 \leq I_n \leq (b-a)\varepsilon_n$, donc $I_n \to 0$.

9 Aires, volumes et valeur moyenne

Propriété

Si f est continue sur $[a,b]$, sa valeur moyenne est $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Si f est positive, l'aire sous la courbe est $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Entre deux courbes, intégrer la différence « fonction supérieure moins fonction inférieure ».

10 Erreurs fréquentes

- Ne pas oublier les bornes après une intégration par parties.
- Une aire géométrique est positive : découper l'intervalle si la différence change de signe.
- Une somme de Riemann doit être remise sous la forme $\dfrac{1}{n}\sum f(k/n)$.
- Vérifier toute primitive en la dérivant.

À retenir