Dérivabilité, étude de fonctions et primitives – Sciences Mathématiques

03

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Maîtriser la dérivabilité, les fonctions réciproques usuelles, les primitives, les variations, la convexité et le plan complet d'étude d'une fonction.

Table des matières

1 Dérivabilité en un point . . . 2
Dérivées unilatérales . . . 2
2 Calcul des dérivées . . . 2
Composée . . . 2
3 Variations et extremums . . . 2
4 Fonction réciproque et dérivée . . . 3
5 Primitives . . . 3
Condition initiale . . . 3
6 Convexité . . . 3
7 Étude complète d'une fonction . . . 4
Plan standard . . . 4
8 Erreurs fréquentes . . . 4

1 Dérivabilité en un point

Définition

f est dérivable en a si

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existe et est finie. Cette limite est $f'(a)$. La tangente en $A(a,f(a))$ a pour équation

$$y=f'(a)(x-a)+f(a).$$

Propriété

Une fonction dérivable en a est continue en a. La réciproque est fausse. $x\mapsto|x|$ est continue en 0 mais n'y est pas dérivable.

Propriété *Dérivées unilatérale*

f est dérivable en a si ses nombres dérivés à gauche et à droite existent et sont égaux. S'ils sont distincts, la courbe possède deux demi-tangentes.

2 Calcul des dérivées

Propriété

$$(u+v)'=u'+v',\quad (uv)'=u'v+uv',\quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2},$$
$$(u^n)'=nu'u^{n-1},\quad (\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}},\quad (\tan u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}.$$

Propriété *Composé*

Si u est dérivable en a et f dérivable en $u(a)$, alors

$$(f\circ u)'(a)=u'(a)f'(u(a)).$$

3 Variations et extremums

Propriété

Sur un intervalle I, si $f'\geq 0$, alors f est croissante ; si $f'\leq 0$, elle est décroissante. Un changement du signe de f' de $+$ vers $-$ donne un maximum local ; de $-$ vers $+$, un minimum local.

4 Fonction réciproque et dérivée

Propriété

Si f est continue et strictement monotone sur I, elle réalise une bijection de I sur $J = f(I)$. Si $f'(a) \neq 0$, alors

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Propriété

La fonction tangente réalise une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$. Sa réciproque est Arctan et

$$(\operatorname{Arctan} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

5 Primitives

Définition

F est une primitive de f sur I si $F' = f$. Si F est une primitive, toutes les primitives sont $F + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. Les formes à reconnaître sont

$$u'u^n, \quad \frac{u'}{u}, \quad u'e^u, \quad \frac{u'}{1+u^2}, \quad \frac{u'}{\sqrt{u}}.$$

Propriété *Condition initiale*

Si f est continue sur I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

6 Convexité

Propriété

Si $f'' \geq 0$ sur I, f est convexe et sa courbe est au-dessus de ses tangentes. Si $f'' \leq 0$, elle est concave. Un changement de signe de f'' donne un point d'inflexion.

7 Étude complète d'une fonction

Méthode *Plan standard*

1. déterminer le domaine, la parité ou la périodicité ;
2. calculer les limites et rechercher les asymptotes ;
3. étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations ;
4. déterminer zéros, signe, convexité et positions relatives ;
5. construire la représentation graphique à partir des résultats prouvés.

8 Erreurs fréquentes

- Étudier le signe de f' seulement sur le domaine de f.
- Une primitive est déterminée à une constante près.
- Une tangente verticale ne correspond pas à un nombre dérivé fini.
- Chaque information graphique doit être justifiée par un calcul.

À retenir

Domaine, limites, dérivée, variations et convexité constituent la chaîne logique d'une étude de fonction.