MATH TUTOR LYCÉE

Devoir à la maison n°1, semestre 1 (2026/2027)

Devoirs à la maison · 1ère Bac S EXP · Semestre 1

EXERCICE N°1

1. Déterminer la négation de la proposition

$$P : \quad (\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad x \geq 0 \text{ et } x^2 - x + 1 > 0,$$

   puis montrer que P est vraie.

2. Déterminer la négation de la proposition

$$Q : \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 = 9 \Longrightarrow x = 3,$$

   puis en déduire la valeur de vérité de Q.

3. Soient a et b deux réels. Montrer que

$$a < b \Longrightarrow a < \frac{a+b}{2} < b.$$

4. Montrer que

$$(\forall x \in]1, +\infty[) \quad \frac{x}{\sqrt{x-1}} \geq 2.$$

5. Montrer l'équivalence suivante :

$$(\forall x \in [1,+\infty[)(\forall y \in [4,+\infty[),$$
$$2\sqrt{x-1}+4\sqrt{y-4} = x+y \iff x=2 \text{ et } y=8.$$

6. Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{n^2+3n+2} \notin \mathbb{N}.$$

7. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer les implications suivantes :

$$x \neq -\frac{1}{2}y \Longrightarrow x-y \neq -3(x+y),$$

$$\Big(x \neq \sqrt{3} \text{ et } x \neq -\sqrt{3}\Big) \Longrightarrow \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \neq 1.$$

8. Démontrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |x-1| \leq x^2 - x + 1.$$

9. Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1+2+2^2+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1.$$

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}.$$

1. Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad A_{n+1} = 17 \times 3 \cdot 5^{2n+1} + 8A_n.$$

2. En déduire, par récurrence, que A_n est divisible par 17 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE N°2

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Montrer que, pour tout $x \in D_f$, $|f(x)| \leq 1$.
3. Étudier la parité de f.
4. a) Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq y$,

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{2(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

   b) En déduire le sens de variation de f sur $[0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

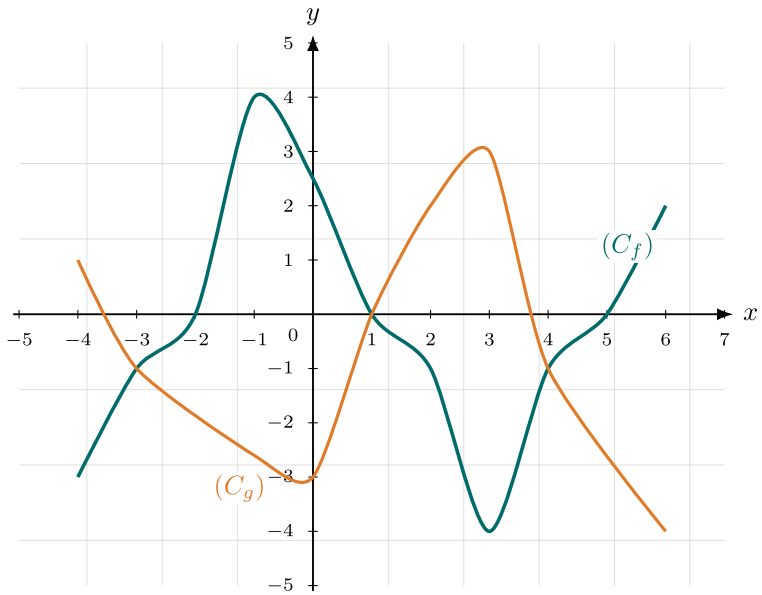
   c) Dresser le tableau de variations de f.
5. Soient g et h les fonctions définies par

$$g(x) = \sqrt{x+1} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{|x+1|}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1. Déterminer le sens de variation de g, puis tracer sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
2. Déterminer graphiquement $g([-1,0])$ et $g([0,+\infty[)$.
3. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = g \circ f(x)$.
4. En déduire le sens de variation de h.

EXERCICE N°3

La figure suivante représente les courbes de deux fonctions f et g.

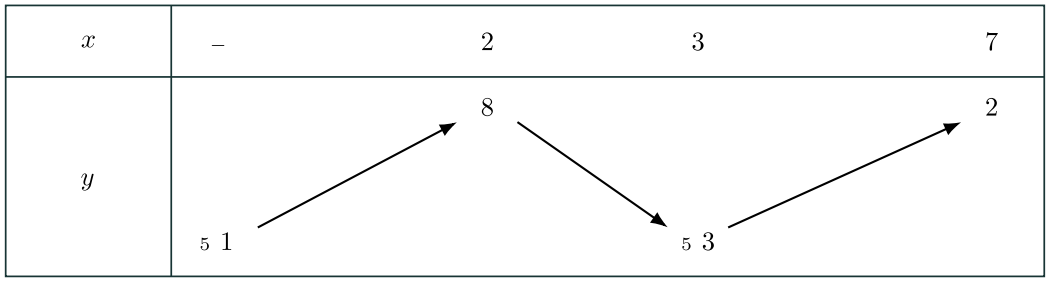


1. Déterminer D_f et D_g.
2. Déterminer $f(-3)$, $f(6)$, $g(0)$ et $g(3)$.
3. Déterminer les antécédents de -1 par la fonction f.
4. Déterminer les extremums de f et de g.
5. Dresser les tableaux de variations de f et de g.
6. Résoudre graphiquement les équations $f(x) = 0$, $g(x) = 3$ et $f(x) = g(x)$.
7. Résoudre graphiquement les inéquations $f(x) \geq 0$, $g(x) < 3$ et $f(x) \geq g(x)$.

8. Soient u et v les fonctions définies par $u(x) = \sqrt{f(x)}$ et $v(x) = \dfrac{1}{f(x)+1}$.
   Déterminer D_u et D_v.

EXERCICE N°4

Soit f une fonction définie sur $[-7, 7]$, paire, et dont le tableau de variations sur $[0, 7]$ est le suivant :



1. Déterminer $f(2)$ et $f(-3)$.
2. Déterminer les extremums de f sur $[0, 7]$.
3. Comparer $f(5)$ et $f(6)$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $[-7, 7]$.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction $-2f$.