MATH TUTOR LYCÉE

Devoir à la maison n°1, sujet supplémentaire, semestre 1

Devoirs à la maison · Tronc Commun · Semestre 1

EXERCICE N°1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier la parité des nombres suivants :

$$4n^2+2n+8, \qquad n^2+5n+7, \qquad n^3-n, \qquad \left(n^2+5n+7\right)^{2025}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $64n^3+4n^2+4n$ est un multiple de 8.
3. Déterminer les deux chiffres a et b pour que le nombre $\overline{5a6b}$ soit divisible par 3 et par 5.
4. Soient a, b, c et e des entiers naturels tels que $ac \geq be$.
   1. Montrer que si d est un diviseur commun de a et b, alors d divise aussi $ac-be$.
   2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $\mathrm{PGCD}(4n+3, 2n+1) = 1$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   1. Vérifier que $\dfrac{n+9}{n+2} = 1 + \dfrac{7}{n+2}$.
   2. Déterminer les valeurs possibles de n pour que $\dfrac{n+9}{n+2} \in \mathbb{N}$.
6. Déterminer tous les couples d'entiers naturels (x, y) tels que $xy-5x-2y = 2$.
7. Déterminer si 281 et 54321 sont des nombres premiers. Justifier.

EXERCICE N°2

On considère les trois nombres

$$a = 18000, \qquad b = 2^2 \times 3^5 \times 5 \times 7^3, \qquad c = 100.$$

1. Décomposer a en produit de facteurs premiers, puis calculer $\mathrm{PGCD}(a, b)$ et $\mathrm{PPCM}(a, b)$.
2. a) Décomposer c en produit de facteurs premiers.

   b) Montrer que c admet neuf diviseurs et déterminer ces diviseurs.
3. Simplifier $\sqrt{ab}$ et $\dfrac{b}{a}$, puis montrer que $\sqrt{5a} \in \mathbb{N}$.
4. Écrire sous la forme d'une fraction irréductible le nombre $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.
5. Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que nb soit un carré parfait.

EXERCICE N°3

$ABCD$ est un parallélogramme. Les points I et J sont définis par

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AJ} = 4\overrightarrow{AD}.$$

1. Construire une figure convenable.
2. Montrer que

$$\overrightarrow{CI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{CJ} = -4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}.$$

3. En déduire que les points C, I et J sont alignés.
4. Les points E et F sont définis par

$$\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Déterminer $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis en déduire que $(EF) \parallel (BD)$.

EXERCICE N°4

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. Le point J est défini par $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

La parallèle à (AB) passant par J coupe (BC) en K, et la parallèle à (AB) passant par O coupe (BC) en I.

1. Construire une figure convenable.
2. Montrer que $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
3. Montrer que I est le milieu de $[BC]$.
4. En déduire que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$.