MATH TUTOR LYCÉE

Devoir à la maison n°2, semestre 2

Devoirs à la maison · Tronc Commun · Semestre 2

EXERCICE N°1

$ABCD$ est un parallélogramme. Le point I est défini par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et la droite (IC) coupe (AD) en E. On considère l'homothétie h de centre I telle que $h(A) = B$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer l'image de la droite (AD) par h.
3. En déduire que $h(E) = C$.
4. Déterminer le rapport de h, puis montrer que $BC = 3AE$.
5. On note $F = h(D)$. Montrer que les points B, C et F sont alignés.
6. On considère la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Construire les images A', B', C' et D' des points A, B, C et D. Montrer que cette translation est la composée de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et de la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

EXERCICE N°2

On donne $AB = 9\,\text{cm}$. La transformation f associe à tout point M le point M' défini par

$$\overrightarrow{MM'} - 5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{M'B} = \overrightarrow{0}.$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe I tel que $\overrightarrow{IA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, puis construire I.

2. Montrer que $\overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{IM}$.
3. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

EXERCICE N°3

$ABCD$ est un parallélogramme de centre I tel que

$$AC = 10, \qquad BI = 2\sqrt{3}, \qquad \widehat{AIB} = \frac{\pi}{6}.$$

1. Calculer $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$, puis montrer que $AB = \sqrt{7}$.
2. Montrer que $BA^2 + BC^2 = 74$.
3. En déduire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$.
4. Le point E est défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AD}$. Montrer que

$$\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{8}\left(AC^2 - 5\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right).$$

5. En déduire que $(IE) \perp (AC)$, puis calculer IE.

EXERCICE N°4

Soient A et B deux points tels que $AB = 8\,\text{cm}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M vérifiant chacune des conditions suivantes :

1. $MA^2 + MB^2 = 36$;
2. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$;

3. $MA^2 - MB^2 = 16$.