MATH TUTOR LYCÉE

Version 8

Contrôles · 2ème Bac · Semestre 1

Matière : Mathématiques

Niveau : 2ème Bac S.Exp (PC)

Durée : 2 heures

Semestre : 1

Barème : 20 points

Calculatrice : autorisée

Instructions : Les questions de l'exercice 2 sont indépendantes. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

EXERCICE N°1

Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = x + 2 - 4\sqrt{x+1}$$

1. Déterminer D_g, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. *(1 pt)*

2. Montrer que g est continue sur D_g. *(1 pt)*

3. Soit h la restriction de g sur l'intervalle $I = [-1\,;\,3]$.

a) Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. *(1 pt)*

b) Dresser le tableau des variations de h^{-1} sur J et vérifier que $h^{-1}(-2) = 0$.

(1 pt)

4. Vérifier que $h(x) = \left(\sqrt{x+1} - 2\right)^2 - 3$ puis calculer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. *(2 pts)*

EXERCICE N°2

Les questions sont indépendantes.

1. Calculer les limites suivantes : *(2 pts)*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - 2} \quad ; \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{1 - \sqrt[3]{x}}$$

2. Rendre rationnel le dénominateur : *(1 pt)*

$$A = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{5}} \quad ; \quad B = \frac{1}{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9}}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ par **deux méthodes différentes** l'inéquation suivante : *(2 pts)*

$$(x-1)^3 + 27 < 0$$

EXERCICE N°3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4\sqrt{x} + 1 & ;\ x \geq 0 \\ \dfrac{x^2 + x + 1}{1 + x^2} & ;\ x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $D_f = \mathbb{R}$. *(1 pt)*

2. Étudier la continuité de f au point 0. *(1 pt)*

3. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. *(1,5 pts)*

4. Étudier la dérivabilité de f au point 0 et interpréter géométriquement les résultats. *(1 pt)*

5. a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, puis étudier le signe de f' sur $]0\,;\,+\infty[$. *(1 pt)*

b) Montrer que $(\forall x \in]-\infty\,;\,0[)\ ;\ f'(x) = \dfrac{-x^2 + 1}{(1 + x^2)^2}$, puis étudier le signe de f' sur $]-\infty\,;\,0[$. *(1 pt)*

c) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. *(1 pt)*

6. Montrer qu'il existe un **unique** $\alpha \in]2\,;\,4[$ tel que $f(\alpha) = 0$ puis déduire que $\alpha^4 + 2\alpha^2 - 16\alpha + 1 = 0$. *(1,5 pts)*