MATH TUTOR LYCÉE

Version 11

Contrôles · 2ème Bac · Semestre 1

Établissement	Lycée Omar Ibn Al Khattab	Matière	Mathématiques
Niveau	2ème Bac S.Exp (PC)	Coefficient	7
Thème	Limites, continuité et dérivabilité	Code	PB 01

PARTIE I

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 1.$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2. a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x}$. La fonction g est-elle dérivable à droite en 0 ? Interpréter géométriquement.

b) Montrer que g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et que :

$$(\forall x>0)\,;\qquad g'(x) = \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}.$$

c) Dresser le tableau de variations de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. a) Montrer que g est une bijection de $[0\,;\,+\infty[$ vers un intervalle J que l'on déterminera, puis déterminer $g([0\,;\,1])$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0\,;\,+\infty[$.

On donne le tableau de valeurs suivant :

x	0,3	0,4	0,5	0,6
$g(x)$	$-0{,}29$	$-0{,}11$	0,06	0,24

► Montrer que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

c) En utilisant la méthode de dichotomie, déterminer un encadrement de α d'amplitude $0{,}05$.
(On donne : $g(0{,}45) \approx -0{,}027$.)

d) Vérifier que $\sqrt{\alpha} = \dfrac{1}{1+\alpha}$, puis calculer $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{g(x)}{x - \alpha}$ en fonction de α.

4. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x dans $[0\,;\,+\infty[$.

5. Montrer que g^{-1} est dérivable en 1, puis calculer $\left(g^{-1}\right)'(1)$.

PARTIE II

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 4\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ x\sqrt{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

1. Montrer que f est continue au point 0, puis en déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

3. a) Vérifier que pour tout $x > 0$:

$$f(x) = x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x\sqrt{x}}\right),$$

puis calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

4. a) Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2g(x)}{\sqrt{x}}.$$

b) Montrer que pour tout x de $]-\infty\,;\,0[$:

$$f'(x) = \frac{2 - 3x}{2\sqrt{1 - x}},$$

puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty\,;\,0[$.

c) En utilisant la Partie I, étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

d) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$, puis montrer que $f(\alpha) = \alpha -$

$3\sqrt{\alpha}$.

5. Soit a un réel de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

a) Déterminer a pour que la tangente à (C_f) au point d'abscisse a soit parallèle à la droite $(D)\ :\ y = 2x$.

b) Pour $a = 1$, écrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.

c) Donner une approximation affine du nombre $f(1{,}002)$.

d) Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f^2(x) - 1}{x - 1}$.

6. a) Montrer que $f(x) < 0$ pour tout x de $]-\infty\,;\,0[$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β dans $]\alpha\,;\,+\infty[$, et que $1 < \beta < 1{,}5$.

c) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

d) Montrer que $\sqrt{\beta}\,(\beta + 2) = 4$, puis en déduire la relation :

$$\sqrt{\beta}\,(\beta + 2) = 4\sqrt{\alpha}\,(\alpha + 1).$$

7. Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle $I = [\alpha\,;\,+\infty[$.

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Calculer $h(1)$ et $h(4)$, puis montrer que h^{-1} est dérivable en -1 et en 16, et calculer $\left(h^{-1}\right)'(-1)$ et $\left(h^{-1}\right)'(16)$.

8. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} a\,g(-x) + 2 & \text{si } x < 0 \\ f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ b\,g(x) + c\,x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

où a, b et c sont des réels.

a) Déterminer le réel a pour que la fonction φ soit continue en 0.

b) Déterminer une relation entre b et c pour que φ soit continue en 1.

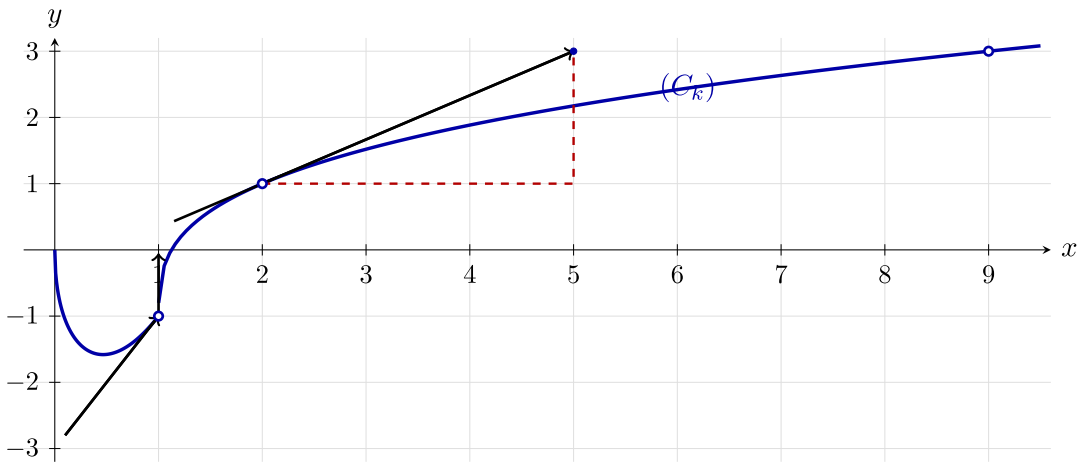
c) Déterminer les réels b et c pour que φ soit continue et dérivable en 1.

PARTIE III

On définit la fonction k sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2\sqrt[3]{x-1} - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La courbe (C_k) ci-dessous est la représentation graphique de k ; les flèches représentent des tangentes ou des demi-tangentes à (C_k). On rappelle que : $k(1) = -1$, $k(2) = 1$ et $k(9) = 3$.



Par lecture graphique :

1. Déterminer $k'_g(1)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{k(x)+1}{x-1}$. La fonction k est-elle dérivable en 1 ? Interpréter géométriquement.

2. Déterminer $k'(2)$, puis en déduire $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{k^2(x)+k(x)-2}{x-2}$.

3. Montrer que pour tout $x > 1$:

$$k'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}},$$

puis vérifier par le calcul la valeur de $k'(2)$ trouvée graphiquement.

4. Justifier graphiquement que l'équation $k(x) = 0$ admet une solution unique γ dans $]1\,;\,+\infty[$, puis vérifier par le calcul que $\gamma = \dfrac{9}{8}$.

5. Soit ψ la restriction de la fonction k à l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

a) Montrer que ψ admet une fonction réciproque ψ^{-1} définie sur un intervalle J' que l'on déterminera.

b) Déterminer $\psi^{-1}(x)$ pour tout x de J'.

c) Comparer $\psi^{-1}\left(\sqrt[3]{3}\right)$ et $\psi^{-1}\left(\sqrt[5]{2}\right)$, puis vérifier les résultats graphiquement.

BONUS

Montrer que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+\beta)\times g(x+\alpha)}{x^2}=\frac{\left(3-\sqrt{\beta}\right)(3\alpha+1)}{\sqrt{\alpha\beta}}.$$