MATH TUTOR LYCÉE

Version 6

Contrôles · 2ème Bac · Semestre 1

EXERCICE 1 4 POINTS

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt[3]{8+x^2}\sqrt{\cos x}}{x^2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x^2-2x-8}{|x^2-2x|}$.
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2\sqrt[3]{x-x^3}-x+1}{3x+\sqrt{x^2+1}-2}$.

EXERCICE 2 3,5 POINTS

Soient a et b deux réels. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} 2ax^3+bx, & x<1,\\ ax^2-b, & 1\le x<2,\\ a\sqrt[3]{x-1}+1, & x\ge 2.\end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f sur $[2,+\infty[$. 0,5 point
2. Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$. 3 points

EXERCICE 3 6,5 POINTS

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = 2x - \sqrt{x+2}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f, puis montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. 1 point
2. Étudier la dérivabilité à droite de f en -2, puis interpréter géométriquement le résultat. 1 point
3. Montrer que f est dérivable sur $D_f \setminus \{-2\}$ et que

$$f'(x) = \frac{4\sqrt{x+2} - 1}{2\sqrt{x+2}}.$$

   1 point
4. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [-1, 2]$.
   1. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à préciser. 1 point
   2. Montrer que g^{-1} est dérivable en -3, puis déterminer $(g^{-1})'(-3)$. 1 point
   3. Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. 1,5 point

EXERCICE 4 6 POINTS

1. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ tel que

$$\sqrt{\alpha + 1} = \frac{-2\alpha}{\alpha + 1}.$$

   1 point
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$.
   1. Vérifier que $g(\alpha) = 0$. 1 point

2. Montrer que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$. 1 point
3. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. 1 point
4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, on a $g^{-1}(x) < 0$. 1 point
5. En utilisant la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude $0{,}25$. 1 point

EXERCICE BONUS 2 POINTS

Soit f la fonction numérique définie par

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f(x) = \frac{x^2 + \sin x}{x^2 - |x|} \quad \text{lorsque ce quotient existe.}$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f. 0,5 point
2. a) Montrer que f est continue à gauche de 0. 0,25 point

   b) La fonction f est-elle continue en 0 ? 0,25 point
3. a) Montrer que, pour tout $x \in]2, +\infty[$, $|f(x) - 1| \leq \dfrac{3}{x}$, puis en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. 0,5 point

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. 0,5 point