07

Équations différentielles – Sciences Mathématiques

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Résoudre les équations différentielles linéaires usuelles du premier et du second ordre, appliquer des conditions initiales et vérifier les solutions.

Table des matières

1 Vocabulaire 2
Vérification 2
2 Équation $y' = ay$ 2
3 Équation $y' = ay + b$ 2
4 Équation linéaire avec second membre 2
5 Second ordre à coefficients constants 3
6 Conditions initiales 3
7 Modélisation 3
8 Erreurs fréquentes 3

1 Vocabulaire

Définition

Une équation différentielle relie une fonction inconnue y à ses dérivées. Résoudre l'équation sur un intervalle consiste à déterminer toutes les fonctions qui la vérifient en chaque point de cet intervalle.

Méthode *Vérification*

Pour vérifier une solution, calculer ses dérivées, les substituer dans l'équation et contrôler l'égalité pour tout x. Vérifier ensuite séparément les conditions initiales.

2 Équation $y' = ay$

Propriété

Pour $a \in \mathbb{R}$, les solutions de

$$y' = ay$$

sont les fonctions $y(x) = Ce^{ax}$, où $C \in \mathbb{R}$.

3 Équation $y' = ay + b$

Propriété

Si $a \neq 0$, les solutions de $y' = ay + b$ sont

$$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Si $a = 0$, les solutions de $y' = b$ sont $y(x) = bx + C$.

4 Équation linéaire avec second membre

Propriété

Si y_p est une solution particulière de $y' - ay = g(x)$, alors toutes les solutions sont

$$y(x) = y_p(x) + Ce^{ax}.$$

La différence de deux solutions de l'équation complète vérifie l'équation homogène.

5 Second ordre à coefficients constants

Propriété

Pour

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad a \neq 0,$$

on associe l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.

- Deux racines réelles distinctes r_1, r_2 : $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.
- Une racine double r : $y = (C_1 x + C_2) e^{rx}$.
- Deux racines complexes $p \pm iq$: $y = e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$.

6 Conditions initiales

Méthode

Écrire d'abord la solution générale. Calculer ensuite y' si nécessaire, puis traduire les conditions initiales en un système portant sur les constantes.

7 Modélisation

Les équations différentielles décrivent notamment une croissance proportionnelle, un refroidissement, un circuit électrique ou un mouvement oscillatoire. Les constantes du modèle sont déterminées à partir des données initiales et des unités doivent rester cohérentes.

8 Erreurs fréquentes

- Ne pas appliquer les conditions initiales avant d'avoir écrit la solution générale.
- Pour une racine double, le facteur x est indispensable.
- Toute solution annoncée doit être contrôlée par substitution.

À retenir

Premier ordre : solution particulière plus solution homogène. Second ordre : commencer par l'équation caractéristique.