SÉRIE D'EXERCICES

2ème Bac Sciences Mathématiques

lycee.mathtutor.ma

Espaces vectoriels

EXERCICE N°1

Dans $\mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) : 2x - y + z = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel.
2. Donner une famille génératrice puis une base.
3. Déterminer sa dimension.
4. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE N°2

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère $P_1 = 1 + X$, $P_2 = X + X^2$, $P_3 = X^2$.

1. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base.
2. Déterminer les coordonnées de $3 - X + 2X^2$.
3. Déterminer les coordonnées de 1, X et X^2 dans cette base.

EXERCICE N°3

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (1, 1, 2)$.

1. Montrer que la famille (u, v) est libre et que (u, v, w) est liée.
2. Déterminer une équation cartésienne de $F = \mathrm{Vect}(u, v)$.
3. Donner une base et la dimension de F.
4. Compléter (u, v) en une base de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE N°4

Dans $\mathbb{R}^4$, $F = \{(x,y,z,t) : x+y=0,\ z+t=0\}$ et $G = \{(x,y,z,t) : x=z,\ y=t\}$.
Déterminer des bases de F, G, $F \cap G$ et $F+G$, puis vérifier la formule des dimensions.

EXERCICE N°5

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}, \qquad V = \{M(a,b) : (a,b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $I = M(1,0)$ et $J = M(0,1)$ forment une base de V.
3. Donner $\dim V$ et les coordonnées de $M(3,3)$ dans cette base.