13

Espaces vectoriels – Sciences Mathématiques

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Reconnaître un espace ou un sous-espace vectoriel réel, étudier des familles, construire des bases et calculer des dimensions.

Table des matières

1 Espaces vectoriels . . . 2
2 Sous-espaces vectoriels . . . 2
Critère . . . 2
3 Combinaisons linéaires et sous-espace engendré . . . 2
4 Familles libres et génératrices . . . 2
Montrer qu'une famille est une base . . . 2
5 Dimension et coordonnées . . . 3
6 Somme et intersection . . . 3
7 Erreurs fréquentes . . . 3

1 Espaces vectoriels

Définition

Un espace vectoriel réel E est un groupe commutatif pour l'addition, muni d'une multiplication externe $(\lambda, u) \mapsto \lambda u$ compatible avec les opérations de $\mathbb{R}$ et de E.

Exemples : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel réel, $\mathbb{R}_n[X]$, $M_n(\mathbb{R})$ et les fonctions réelles définies sur un intervalle.

Propriété

$$0u = 0_E, \quad \lambda 0_E = 0_E, \quad (-1)u = -u, \quad \lambda u = 0_E \Longrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E.$$

2 Sous-espaces vectoriels

Propriété

Critèr

Une partie non vide F de E est un sous-espace vectoriel si

$$\forall u, v \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad \lambda u + \mu v \in F.$$

3 Combinaisons linéaires et sous-espace engendré

Définition

u est combinaison linéaire de $(u_1, \ldots, u_p)$ s'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p.$$

L'ensemble de ces combinaisons est noté $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$.

4 Familles libres et génératrices

Définition

Une famille est génératrice si tout vecteur de l'espace est combinaison linéaire de ses éléments. Elle est libre si

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

Une famille à la fois libre et génératrice est une base.

Méthode

Montrer qu'une famille est une base

On peut prouver séparément liberté et caractère générateur. Dans un espace de dimension n, une famille libre de n vecteurs, ou une famille génératrice de n vecteurs, est automatiquement une base.

5 Dimension et coordonnées

Propriété

Toutes les bases d'un espace de dimension finie possèdent le même nombre de vecteurs. Dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, tout vecteur s'écrit de manière unique

$$u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Le n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ est le système de coordonnées de u dans $\mathcal{B}$.

6 Somme et intersection

Propriété

Pour deux sous-espaces F et G de dimension finie,

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

La somme est directe, notée $F \oplus G$, lorsque $F \cap G = \{0_E\}$.

7 Erreurs fréquentes

- Une équation affine non homogène ne définit généralement pas un sous-espace.
- Une famille génératrice n'est pas nécessairement libre.
- Les coordonnées dépendent de la base choisie.
- Une somme $F + G$ n'est directe que lorsque $F \cap G = \{0_E\}$.

À retenir

Sous-espace : stabilité par combinaison linéaire. Une base est une famille à la fois libre et génératrice ; le nombre de ses vecteurs est la dimension de l'espace.