SÉRIE D'EXERCICES

2ème Bac

lycee.mathtutor.ma

Fiche : tracer les courbes (Cf) et (Cf⁻¹)

1. Règles à mémoriser

0.1. R1. Théorème de la réciproque

Si f est **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I, alors f admet une **fonction réciproque** $f^{-1} : J \to I$ définie sur $J = f(I)$, de **même monotonie**. Les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont **symétriques** par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

0.2. R2. Correspondance entre (C_f) et $(C_{f^{-1}})$

(C_f)	$(C_{f^{-1}})$
Point $A(a, b)$	Point $A'(b, a)$
Asymptote verticale $x = a$	Asymptote horizontale $y = a$
Asymptote horizontale $y = b$	Asymptote verticale $x = b$
Asymptote oblique $y = ax + b$	Asymptote oblique $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$
Demi-tangente **verticale**	Demi-tangente **horizontale**
Point d'inflexion	Point d'inflexion

0.3. R3. Concavité de la réciproque

$$(f^{-1})''(b) = -\frac{f''(a)}{\big(f'(a)\big)^3} \quad \text{avec } b = f(a).$$

- Si f est **croissante**, la concavité est **inversée** (convexe $\leftrightarrow$ concave).
- Si f est **décroissante**, la concavité est **conservée**.

0.4. R4. Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a)\, f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet **au moins** une solution dans $]a, b[$. Si de plus f est strictement monotone sur $[a, b]$, cette solution est **unique**.

0.5. R5. Méthode de tracé

1. Domaine et bornes, puis branches infinies (asymptotes).
2. Continuité et points particuliers (points anguleux, demi-tangentes).
3. Tableau de variations.
4. Concavité et points d'inflexion.
5. Symétries.
6. Tracer (C_f) puis $(C_{f^{-1}})$ par symétrie d'axe $y = x$.

2. Exercices

EXERCICE N°1

Soit

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}.$$

Données.

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; f est **impaire**, donc $O(0,0)$ est centre de symétrie.
- Asymptotes verticales : $x = -1$ et $x = 1$; asymptote oblique : $y = x$ en $\pm\infty$.
- Position relative : $f(x) - x = \frac{x}{x^2-1}$; (C_f) est **au-dessus** de $y = x$ sur $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$ et **au-dessous** sur $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$.
- Variations : croissante sur $]-\infty, -\sqrt{3}[$; maximum local en $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; décroissante en passant par 0 (point d'inflexion stationnaire) ; minimum local en $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; croissante sur $]\sqrt{3}, +\infty[$.
- Concavité : un unique point d'inflexion en $x = 0$.

Questions.

1. Tracer (C_f) avec toutes ses asymptotes et le centre O.
2. Soit g la restriction de f à $[\sqrt{3}, +\infty[$. Donner $J = g([\sqrt{3}, +\infty[)$, puis tracer $(C_{g^{-1}})$ avec son asymptote.
3. **TVI :** justifier le signe de $f(x)$ sur chacun des intervalles de D_f.

EXERCICE N°2

Soit

$$f(x) = x + \frac{x}{x^2 + 2}.$$

Données.

- $D_f = \mathbb{R}$; f est **impaire**, donc $O(0, 0)$ est centre de symétrie.
- Asymptote oblique : $y = x$ en $\pm\infty$; (C_f) est au-dessus pour $x > 0$ et au-dessous pour $x < 0$.
- f est strictement croissante ; elle admet donc une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$.
- (C_f) admet **trois points d'inflexion** d'abscisses $-\sqrt{6}$, 0 et $\sqrt{6}$.

Questions.

1. Tracer (C_f) en marquant les trois points d'inflexion.
2. Tracer $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère ; donner ses points d'inflexion, son asymptote oblique et sa concavité.
3. **TVI :** montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique.

EXERCICE N°3

Soit

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Données.

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; asymptote verticale : $x = 1$; asymptote oblique : $y = x + 1$ en $\pm\infty$; centre de symétrie : $\Omega(1, 2)$.
- Variations : croissante sur $]-\infty, 0[$; maximum local en $(0, 0)$; décroissante sur $]0, 1[$ (vers $-\infty$) et sur $]1, 2[$ (depuis $+\infty$) ; minimum local en $(2, 4)$; croissante sur $]2, +\infty[$.
- Concavité : (C_f) est concave sur $]-\infty, 1[$ et convexe sur $]1, +\infty[$.

Questions.

1. Tracer (C_f) avec Ω et les asymptotes.
2. Soit g la restriction de f à $[2, +\infty[$. Donner $J = g([2, +\infty[)$, puis tracer $(C_{g^{-1}})$.
3. **TVI :** montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet exactement deux solutions et les localiser.

EXERCICE N°4

Soit

$$f(x) = |x^2 - x - 2|.$$

Données.

- (C_f) admet deux **points anguleux** en $(-1, 0)$ et $(2, 0)$, et un maximum local en $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$.
- Concavité : convexe sur $]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$ et concave sur $]-1, 2[$.
- Variations : décroissante sur $]-\infty, -1[$, croissante sur $]-1, \frac{1}{2}[$, décroissante sur $]\frac{1}{2}, 2[$, croissante sur $]2, +\infty[$.

Questions.

1. Tracer (C_f) en marquant les deux points anguleux.
2. Soit g la restriction de f à $[2, +\infty[$. Trouver $g^{-1}(x)$ et tracer $(C_{g^{-1}})$.
3. **TVI :** montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet **quatre** solutions, une dans chaque intervalle de monotonie.

EXERCICE N°5

Soit

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Données.

- $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
- En $-\infty$, asymptote oblique $y = 2x$; en $+\infty$, asymptote horizontale $y = 0$, avec (C_f) au-dessus.
- **Demi-tangentes verticales** en $(-1, -1)$ et $(1, 1)$.
- Variations : croissante sur $]-\infty, -1]$ (jusqu'à -1) et décroissante sur $[1, +\infty[$ (de 1 à 0).
- Concavité : (C_f) est convexe sur chaque branche.

Questions.

1. Tracer (C_f) (deux branches disjointes).
2. Soit g la restriction de f à $[1, +\infty[$. Déterminer $g^{-1}(x)$, puis tracer $(C_{g^{-1}})$.
3. **TVI :** montrer que l'équation $f(x) = -3$ admet une solution unique dans $]-\infty, -1[$.

EXERCICE N°6

Soit

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1.$$

Données.

- f est strictement croissante ; elle admet donc une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$.
- (C_f) est concave sur $]-\infty, -\frac{1}{3}[$, convexe sur $]-\frac{1}{3}, +\infty[$, avec un **point d'inflexion** en $\left(-\frac{1}{3}, \frac{20}{27}\right)$.
- $f(-1) = 0$.

Questions.

1. Tracer (C_f) avec son point d'inflexion.
2. **TVI :** montrer que f admet une unique racine α et la localiser.
3. Tracer $(C_{f^{-1}})$; donner son point d'inflexion et calculer $(f^{-1})'(0)$.