05

Fonction exponentielle – Sciences Mathématiques

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Définir l'exponentielle comme réciproque du logarithme, utiliser ses propriétés, ses limites et étudier les fonctions exponentielles.

Table des matières

1 Définition et lien avec le logarithme 2
2 Propriétés algébriques 2
3 Dérivée, variations et convexité 2
4 Limites et croissances comparées 2
5 Fonctions de la forme e^u 3
6 Équations et inéquations 3
7 Exponentielle de base a 3
8 Erreurs fréquentes 3

1 Définition et lien avec le logarithme

Définition

La fonction exponentielle, notée exp, est la réciproque de ln. On écrit $\exp(x) = e^x$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$:

$$\ln(e^x) = x, \qquad e^{\ln y} = y.$$

Propriété

exp réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. En particulier, $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2 Propriétés algébriques

Propriété

Pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}, \quad (e^x)^n = e^{nx}.$$

3 Dérivée, variations et convexité

Propriété

$$(e^x)' = e^x, \qquad (e^x)'' = e^x.$$

La fonction exponentielle est strictement croissante et strictement convexe sur $\mathbb{R}$. Sa tangente au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$.

Conséquence

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x \geq 1 + x,$$

avec égalité seulement pour $x = 0$.

4 Limites et croissances comparées

Propriété

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Pour tout $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^x = 0.$$

5 Fonctions de la forme e^u

Propriété

Si u est dérivable sur I, alors

$$(e^u)' = u'e^u.$$

Les primitives de $u'e^u$ sont $e^u + C$.

6 Équations et inéquations

Propriété

$$e^a = e^b \iff a = b, \qquad e^a < e^b \iff a < b.$$

Une équation polynomiale en e^x se traite en posant $X = e^x > 0$.

7 Exponentielle de base a

Définition

Pour $a > 0$, on pose $a^x = e^{x \ln a}$. Si $a \neq 1$,

$$(a^x)' = (\ln a)a^x.$$

La fonction est croissante lorsque $a > 1$ et décroissante lorsque $0 < a < 1$.

8 Erreurs fréquentes

- $e^{x+y} = e^x e^y$, mais $e^{x+y} \neq e^x + e^y$.
- e^x ne s'annule jamais.
- Après la substitution $X = e^x$, conserver uniquement les racines $X > 0$.

À retenir

L'exponentielle transforme une somme en produit, est toujours positive et domine toute puissance à $+\infty$.