SÉRIE D'EXERCICES

2ème Bac Sciences Mathématiques

lycee.mathtutor.ma

Limites et continuité

EXERCICE N°1

Calculer :

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$;
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{x}$;
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x\right)$;
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\tan 2x}$;
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - x}{x^3 + 4}$;
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(4x)}{x^2}$.

EXERCICE N°2

Déterminer dans chaque cas la valeur du paramètre rendant la fonction continue :

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ si $x \neq 3$ et $f(3) = a$;
2. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = b$;
3. $h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = c$.

EXERCICE N°3

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer le nombre de solutions de $f(x) = 0$.
3. Encadrer chaque solution entre deux entiers consécutifs.
4. Préciser l'image de $[-1, 1]$ par f.

EXERCICE N°4

Soit $g(x) = x^3 + 2x - 2$.

1. Montrer que $g(x) = 0$ possède une unique solution $\alpha \in]0, 1[$.
2. Effectuer quatre étapes de dichotomie à partir de $[0, 1]$.
3. Donner un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-2}.
4. Déterminer le nombre minimal d'étapes garantissant une amplitude $< 10^{-6}$.

EXERCICE N°5

Soit $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

1. Étudier continuité, limites et variations.
2. Montrer que f réalise une bijection sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $f^{-1}(0)$.
4. Exprimer $(f^{-1})'(y)$ à l'aide de $f^{-1}(y)$.

EXERCICE N°6

Pour $n \geq 2$, soit $f_n(x) = x^n$ sur $[0, +\infty[$.

1. Justifier que f_n possède une réciproque.
2. Déterminer la dérivée de $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ sur $]0, +\infty[$.
3. Résoudre $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{x-1} = 2$.

EXERCICE N°7

Soit $f(x) = 2x + \operatorname{Arctan} x$.

1. Étudier f sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'elle est bijective.
2. Calculer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.
3. Montrer que $|\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y| \leq |x - y|$.

EXERCICE N°8

Soit $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$ sur $[0, +\infty[$.

1. Étudier continuité et variations.
2. Déterminer $f([0, +\infty[)$ et justifier l'existence de f^{-1}.
3. Résoudre $f(x) = 2$.
4. Déterminer explicitement $f^{-1}(y)$ pour $y \geq 0$.

EXERCICE N°9

Soit $f(x) = x^5 + x + 1$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α.
3. Établir $-1 < \alpha < 0$, puis obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
4. Calculer $(f^{-1})'(1)$.

EXERCICE N°10

On pose $h(x) = 3\,\mathrm{Arctan}\,x$ sur $[0, 1/\sqrt{3}]$ et
$h(x) = \pi + 3\,\mathrm{Arctan}\,x$ sur $]1/\sqrt{3}, +\infty[$.

1. Étudier les limites unilatérales en $1/\sqrt{3}$.
2. La fonction h est-elle continue en ce point ? Justifier.
3. Étudier les variations sur chacun des intervalles de définition.