01 Limites et continuité – Sciences Mathématiques

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Étudier une continuité, appliquer le TVI, construire une dichotomie et déterminer une fonction réciproque.

Table des matières

1 Limite d'une fonction en un point . . . 2
Limite finie . . . 2
Limites infinies . . . 2
Limites à droite et à gauche . . . 2
2 Calcul des limites et formes indéterminées . . . 2
Limites remarquables . . . 2
Comparaison et composition . . . 2
3 Asymptotes et branches infinies . . . 3
Asymptote oblique . . . 3
4 Continuité en un point et sur un intervalle . . . 3
Dérivabilité et continuité . . . 3
5 Image d'un intervalle . . . 3
6 Théorème des valeurs intermédiaires . . . 4
TVI . . . 4
Existence et unicité . . . 4
Unicité . . . 4
7 Méthode de dichotomie . . . 4
Précision après n étapes . . . 4
8 Fonction réciproque . . . 4
Déterminer une réciproque . . . 4
Dérivée de la réciproque . . . 5
9 Racines n-ièmes, puissances rationnelles et Arctan . . . 5
Règles sur les racines . . . 5
10 Méthodes de calcul des limites . . . 5
Lever une indétermination . . . 5
11 Rédiger une application du TVI . . . 6
12 Erreurs fréquentes . . . 6

1 Limite d'une fonction en un point

Définition *Limite finie*

Soit f définie au voisinage de a, éventuellement non définie en a. Dire que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a signifie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, \quad 0 < |x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$. Une limite, lorsqu'elle existe, est unique.

Définition *Limites infinies*

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0, \quad 0 < |x-a| < \alpha \Longrightarrow f(x) > A.$$

Les définitions de $-\infty$ et des limites lorsque $x \to \pm\infty$ s'obtiennent de la même façon.

Propriété *Limites à droite et à gauch*

La limite de f en a existe et vaut ℓ si, et seulement si,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell.$$

Lorsque les deux limites unilatérales sont distinctes, f n'admet pas de limite en a.

2 Calcul des limites et formes indéterminées

Propriété

Les opérations sur les limites permettent de traiter sommes, produits, quotients et compositions. Les formes $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$ sont indéterminées et exigent une transformation adaptée.

Propriété *Limites remarquable*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

Par composition, si $u(x) \to 0$, alors $\dfrac{\sin u(x)}{u(x)} \to 1$ dès que le quotient est défini au voisinage considéré.

Propriété *Comparaison et compositio*

Au voisinage du point étudié :

- si $f \leq g$ et $f \to +\infty$, alors $g \to +\infty$;
- si $f \leq g \leq h$ et $f, h \to \ell$, alors $g \to \ell$;
- si $g(x) \to b$ et $f(t) \to \ell$ lorsque $t \to b$, alors $f(g(x)) \to \ell$, sous réserve que la composition soit définie.

3 Asymptotes et branches infinies

Propriété

La droite $x = a$ est une asymptote verticale si l'une des limites unilatérales de f en a est infinie. La droite $y = \ell$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Propriété *Asymptote obliqu*

La droite $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ lorsque

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0.$$

Lorsque les limites existent, on recherche

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big).$$

Le signe de $f(x) - (ax + b)$ donne la position relative de la courbe et de l'asymptote.

4 Continuité en un point et sur un intervalle

Définition

f est continue en a si $a \in D_f$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Elle est continue à droite ou à gauche lorsque la limite unilatérale correspondante vaut $f(a)$.

Propriété

Somme, produit et composée de fonctions continues sont continus sur leurs domaines naturels. Un quotient est continu là où son dénominateur ne s'annule pas.

Propriété *Dérivabilité et continuit*

Toute fonction dérivable en a est continue en a. La réciproque est fausse : $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'y est pas dérivable.

Définition

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, la fonction définie par $g(x) = f(x)$ pour $x \neq a$ et $g(a) = \ell$ est le prolongement par continuité de f en a.

5 Image d'un intervalle

Propriété

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. L'image d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue est un segment ; f y atteint son minimum et son maximum.

Si f est continue et strictement croissante sur $[a,b]$, alors $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. Si elle est strictement décroissante, $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$.

6 Théorème des valeurs intermédiaires

Propriété *TVI*

Si f est continue sur $[a,b]$, toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ possède au moins un antécédent dans $[a,b]$. En particulier, si $f(a)f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ possède une solution dans $]a,b[$.

Remarque *Existence et unicité*

Le TVI donne une existence. La stricte monotonie donne au plus une solution. Les deux arguments sont indépendants et doivent porter sur le même intervalle. Une dérivée qui change de signe sur cet intervalle ne permet pas de conclure directement à l'unicité.

Propriété *Unicit*

Si, de plus, f est strictement monotone sur $[a,b]$, cette solution est unique.

7 Méthode de dichotomie

Soit f continue et strictement monotone sur $[a_0, b_0]$, avec $f(a_0)f(b_0) < 0$. À chaque étape, on pose $m_n = (a_n + b_n)/2$ et on conserve le sous-intervalle où les valeurs aux extrémités ont des signes contraires. Après n étapes, l'amplitude vaut $(b_0 - a_0)/2^n$.

Propriété *Précision après n étape*

Après n subdivisions, la solution appartient à un intervalle de longueur $(b_0 - a_0)/2^n$. Pour obtenir une longueur inférieure à ε, on choisit le plus petit entier n vérifiant

$$2^n > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}.$$

8 Fonction réciproque

Propriété

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, elle réalise une bijection de I sur $J = f(I)$. Sa réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue, strictement monotone dans le même sens, et

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Méthode *Déterminer une réciproque*

1. préciser un intervalle I sur lequel f est continue et strictement monotone ;
2. calculer $J = f(I)$ à l'aide des valeurs ou limites aux bornes ;
3. poser $y = f(x)$ avec $x \in I$ et isoler x ;
4. vérifier que l'expression obtenue prend bien ses valeurs dans I.

Propriété *Dérivée de la réciproqu*

Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

9 Racines n-ièmes, puissances rationnelles et Arctan

Propriété

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Sa réciproque est $x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Pour $r = p/q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$, on définit $x^r = \sqrt[q]{x^p}$ sur $]0, +\infty[$.

Propriété *Règles sur les racine*

Pour $a, b \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}, \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b > 0).$$

Si n est pair, $\sqrt[n]{x^n} = |x|$; si n est impair, $\sqrt[n]{x^n} = x$ pour tout réel x.

Propriété

La fonction tangente est une bijection continue de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Sa réciproque est Arctan, avec

$$(\operatorname{Arctan} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{Arctan} x = \pm\frac{\pi}{2}.$$

10 Méthodes de calcul des limites

Méthode *Lever une indétermination*

- Factoriser par le terme dominant pour les quotients polynomiaux.
- Utiliser la quantité conjuguée lorsqu'une racine intervient.
- Mettre au même dénominateur pour une différence de quotients.
- Employer un encadrement ou une limite remarquable pour les fonctions trigonométriques.

Chaque transformation doit être valable dans un voisinage du point étudié.

11 Rédiger une application du TVI

Méthode

Pour montrer que $f(x) = 0$ possède une unique solution sur $[a, b]$:

1. préciser que f est continue sur $[a, b]$;
2. calculer $f(a)$ et $f(b)$ puis vérifier $f(a)f(b) < 0$;
3. conclure à l'existence par le TVI ;
4. établir la stricte monotonie sur le même intervalle pour obtenir l'unicité.

12 Erreurs fréquentes

- Le changement de signe assure l'existence, pas l'unicité.
- La monotonie seule n'assure pas l'existence d'une racine.
- La réciproque f^{-1} n'existe sur $f(I)$ que lorsque f est bijective sur I.
- Une expression non définie en a ne peut pas être continue en a avant prolongement.

À retenir

Pour appliquer le TVI avec unicité, vérifier séparément la continuité, le changement de signe et la stricte monotonie sur le même intervalle.