04 Fonction logarithme népérien – Sciences Mathématiques

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Définir le logarithme népérien, maîtriser ses propriétés algébriques, ses limites, sa dérivée et l'étude des fonctions contenant un logarithme.

Table des matières

1 Définition du logarithme népérien . . . 2
2 Propriétés algébriques . . . 2
Idée de démonstration . . . 2
3 Étude de la fonction ln . . . 2
Signe . . . 2
4 Dérivation et primitives . . . 3
5 Limites et croissances comparées . . . 3
6 Équations, inéquations et encadrements . . . 3
Résoudre avec un logarithme . . . 3
7 Logarithme de base a . . . 3
Logarithme décimal . . . 3
8 Erreurs fréquentes . . . 4

1 Définition du logarithme népérien

Définition

La fonction logarithme népérien, notée ln, est l'unique primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad \ln 1 = 0.$$

Propriété

ln est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

2 Propriétés algébriques

Propriété

Pour $x, y > 0$, $n \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{Q}$ lorsque l'expression est définie :

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^n) = n \ln x, \quad \ln(x^r) = r \ln x.$$

Remarque

Idée de démonstration

Pour $a > 0$, la fonction $x \mapsto \ln(ax) - \ln x$ a une dérivée nulle sur $]0, +\infty[$; elle est donc constante. En prenant $x = 1$, on obtient $\ln(ax) = \ln a + \ln x$.

3 Étude de la fonction ln

Propriété

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

La droite $x = 0$ est une asymptote verticale. Comme $(\ln x)' = 1/x > 0$, la fonction est strictement croissante ; comme $(\ln x)'' = -1/x^2 < 0$, elle est concave.

Propriété

Sign

$$0 < x < 1 \Longrightarrow \ln x < 0, \qquad \ln 1 = 0, \qquad x > 1 \Longrightarrow \ln x > 0.$$

4 Dérivation et primitives

Propriété

Si u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Plus généralement, si u ne s'annule pas sur I,

$$(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}.$$

Les primitives de u'/u sur I sont donc $\ln |u| + C$.

5 Limites et croissances comparées

Propriété

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0),$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \quad (\alpha > 0).$$

Toute puissance positive domine donc le logarithme à l'infini.

6 Équations, inéquations et encadrements

Propriété

Pour $a, b > 0$,

$$\ln a = \ln b \iff a = b, \qquad \ln a < \ln b \iff a < b.$$

Pour tout $x > 0$,

$$\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1,$$

avec égalité seulement pour $x = 1$.

Méthode *Résoudre avec un logarithme*

Écrire d'abord toutes les conditions de positivité. Utiliser ensuite les propriétés algébriques, puis l'injectivité de ln. Vérifier enfin que les solutions obtenues appartiennent au domaine.

7 Logarithme de base a

Définition

Pour $a > 0$, $a \neq 1$, on définit

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad (x > 0).$$

Cette fonction est croissante si $a > 1$ et décroissante si $0 < a < 1$.

Définition *Logarithme décimal*

Le logarithme de base 10 est appelé logarithme décimal et se note log :

$$\log x = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10} \qquad (x > 0).$$

Ainsi, $\log(10^n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et $10^x = a \iff x = \log a$ pour $a > 0$.

8 Erreurs fréquentes

- $\ln(x + y)$ n'est pas égal à $\ln x + \ln y$.
- $\ln u$ exige $u > 0$; $\ln |u|$ exige seulement $u \neq 0$.
- Une équation logarithmique se résout toujours avec ses conditions d'existence.

À retenir

Le logarithme transforme un produit en somme. Son domaine est $]0, +\infty[$ et ses arguments doivent toujours être contrôlés avant tout calcul.