SÉRIE D'EXERCICES

2ème Bac Sciences Mathématiques

lycee.mathtutor.ma

Nombres complexes

EXERCICE N°1

Mettre sous forme algébrique :

$$(2-3i)(1+2i), \qquad \frac{3+i}{1-2i}, \qquad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2026}, \qquad \frac{1}{(1+i)^8}.$$

EXERCICE N°2

Pour $z \in \mathbb{C}$:

1. Résoudre $z + 2\overline{z} = 3 + i$.
2. Décrire les ensembles $|z-1| = 2$, $|z-i| = |z+1|$ et $\mathrm{Re}((1+i)z) = 2$.
3. Montrer que $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.

EXERCICE N°3

Déterminer module et argument de $1 + i\sqrt{3}$, $-\sqrt{3} + i$, $(1+i)^6$ et $\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$, puis écrire ces nombres sous forme exponentielle.

EXERCICE N°4

1. Linéariser $\cos^4 x$ et $\sin^3 x$.
2. Exprimer $\cos 5x$ en fonction de $\cos x$.
3. Calculer exactement $\cos \dfrac{\pi}{10}$.

EXERCICE N°5

1. Résoudre $z^6 = 1$ et représenter les solutions.
2. Résoudre $z^4 = -16$.
3. Calculer la somme et le produit des racines n-ièmes de l'unité.

EXERCICE N°6

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$z^2 - (3+i)z + 2 + 2i = 0, \qquad (1+i)z^2 - 2z + 1 - i = 0.$$

Puis factoriser $z^3 - 6z^2 + 12z - 16$ sachant que 4 est une racine.

EXERCICE N°7

Dans le plan complexe, $A(1+i)$, $B(3+i)$, $C(2+2i)$ et $D(2)$.

1. Montrer que A, B, C, D sont cocycliques.
2. Déterminer le centre et le rayon du cercle.
3. Étudier la nature du triangle ABC.

EXERCICE N°8

Pour chaque transformation, déterminer nature, centre éventuel, rapport et angle :

$$z' = iz + 1 - i, \qquad z' = (1+i)z + 2 - i, \qquad z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z + 1 - i.$$

Étudier ensuite la composée d'une rotation de centre 0, angle $\pi/3$, avec la translation de vecteur d'affixe 2.

EXERCICE N°9

Soient $A(\sqrt{3} - i)$, $B(-\sqrt{3} + i)$, $C(\sqrt{3} + 3i)$ et $D(\sqrt{3} - 3i)$.

1. Étudier l'alignement de A, C, D.
2. Déterminer module et argument de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
3. En déduire la nature du triangle ABC.
4. Construire une similitude directe envoyant A sur C et B sur A.

EXERCICE N°10

On considère $P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (5+4i)z - 5i$.

1. Vérifier que i est une racine de P.
2. Factoriser P puis résoudre $P(z) = 0$.
3. Représenter les images des racines et déterminer la nature du triangle obtenu.

EXERCICE N°11

Soit S définie par $z' = (1+i)z + 2 - i$.

1. Déterminer le centre, le rapport et l'angle de S.
2. Calculer l'affixe de $S^n(M)$ en fonction de z_M.
3. Déterminer les points M tels que M, $S(M)$, $S^2(M)$ soient alignés.