09 Nombres complexes – Sciences Mathématiques

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

À la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- calculer avec les formes algébrique, trigonométrique et exponentielle ;
- interpréter géométriquement module, argument et quotient de deux affixes ;
- exploiter les formules de De Moivre et d'Euler ;
- résoudre les équations $z^n = a$ et les équations du second degré à coefficients complexes ;
- reconnaître une translation, une homothétie, une rotation ou une similitude directe.

Table des matières

1 Forme algébrique et calcul dans $\mathbb{C}$ . . . 2
1.1 Définition et égalité . . . 2
1.2 Opérations . . . 2
2 Représentation géométrique . . . 2
Barycentre . . . 3
Alignement et parallélisme . . . 3
Cocyclicité . . . 3
3 Conjugué, module et lieux géométriques . . . 3
3.1 Conjugué . . . 3
3.2 Module et distance . . . 3
4 Argument et formes trigonométrique et exponentielle . . . 4
4.1 Argument et angles orientés . . . 4
Angle de deux vecteurs . . . 4
4.2 Formes trigonométrique et exponentielle . . . 4
5 Formules de De Moivre et d'Euler . . . 5
Formule de De Moivre . . . 5
Formules d'Euler . . . 5
6 Racines n-ièmes d'un nombre complexe . . . 5
Racines de l'unité . . . 5
7 Équations du second degré dans $\mathbb{C}$ . . . 6
7.1 Racines carrées d'un complexe . . . 6
7.2 Équation générale . . . 6
8 Transformations et similitudes directes . . . 6
8.1 Transformations usuelles . . . 6
Translation . . . 6
Homothétie . . . 6
Rotation . . . 6
8.2 Similitude directe . . . 7
Composition . . . 7
9 Synthèse . . . 7
À retenir . . . 7

1 Forme algébrique et calcul dans $\mathbb{C}$

1.1 Définition et égalité

Propriété

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$ et un élément i tel que $i^2 = -1$. Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme

$$z = a + ib, \qquad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Définition

Dans l'écriture $z = a + ib$:

- $a = \mathrm{Re}(z)$ est la partie réelle de z ;
- $b = \mathrm{Im}(z)$ est la partie imaginaire de z ;
- $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0$;
- $z \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z) = 0$.

Propriété

Pour $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$:

$$z = z' \iff a = a' \text{ et } b = b'.$$

En particulier, $z = 0 \iff a = b = 0$.

1.2 Opérations

Propriété

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. Alors

$$\begin{aligned} z + z' &= (a + a') + i(b + b'), \\ zz' &= (aa' - bb') + i(ab' + a'b), \\ \frac{1}{z} &= \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \qquad (z \neq 0). \end{aligned}$$

2 Représentation géométrique

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Définition

Au complexe $z = x + iy$ correspond le point $M(x; y)$, appelé *point image* de z. Réciproquement, z est l'*affixe* de M. Le vecteur de coordonnées $(x; y)$ a aussi pour affixe z.

Propriété

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points.

$$\mathrm{aff}(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A, \qquad z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

où I est le milieu de $[AB]$.

Propriété

Barycentr

Soient $A_k(z_k)$, $1 \leq k \leq n$, et des réels α_k tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$. Le barycentre G du système $\{(A_k, \alpha_k)\}_{1 \leq k \leq n}$ a pour affixe

$$z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}.$$

Propriété

Alignement et parallélism

Pour trois points deux à deux distincts A, B et C :

$$A, B, C \text{ alignés} \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$

Pour quatre points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$:

$$(AB) \parallel (CD) \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$

Propriété

Cocyclicit

Soient A, B, C, D quatre points deux à deux distincts, avec A, B, C non alignés. Alors

$$A, B, C, D \text{ sont cocycliques} \iff \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}.$$

3 Conjugué, module et lieux géométriques

3.1 Conjugué

Définition

Le conjugué de $z = a + ib$ est $\overline{z} = a - ib$. Géométriquement, le point d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique du point d'affixe z par rapport à l'axe réel.

Propriété

Pour $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$;
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$;
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ si $z' \neq 0$;
- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$;
- $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

3.2 Module et distance

Définition

Pour $z = x + iy$:

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si $M(z)$, alors $|z| = OM$.

Propriété

Pour $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

- $|z| = |-z| = |\overline{z}|$;
- $|zz'| = |z|\,|z'|$;
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ si $z' \neq 0$;
- $|z^n| = |z|^n$;
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$;
- $\big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'|$.

Propriété

Pour deux points $A(z_A)$ et $B(z_B)$:

$$AB = |z_B - z_A|.$$

Ainsi, $|z - z_A| = r$ représente le cercle de centre A et de rayon $r > 0$, et $|z - z_A| = |z - z_B|$ représente la médiatrice de $[AB]$.

4 Argument et formes trigonométrique et exponentielle

4.1 Argument et angles orientés

Définition

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, un argument de z est toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$, où $M(z)$. On écrit

$$\arg(z) \equiv \theta \ [2\pi].$$

Propriété

Pour $z, z' \in \mathbb{C}^*$:

- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \ [2\pi]$;
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \ [2\pi]$;
- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg z \ [2\pi]$;
- $\arg(z^n) \equiv n \arg z \ [2\pi]$.

Propriété *Angle de deux vecteur*

Pour trois points distincts A, B, C :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \ [2\pi].$$

Le quotient est réel si les points sont alignés, et imaginaire pur si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

4.2 Formes trigonométrique et exponentielle

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $r = |z|$ et θ un argument de z. Alors

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

Propriété

Pour $r, r' > 0$, $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$re^{i\theta}\, r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')},$$
$$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')},$$
$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}.$$

5 Formules de De Moivre et d'Euler

Propriété *Formule de De Moivr*

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Propriété *Formules d'Eule*

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Conséquence

En développant $(\cos x + i\sin x)^3$ puis en identifiant les parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x, \qquad \sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

6 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une racine n-ième de a est un nombre complexe z tel que $z^n = a$.

Propriété

Écrivons $a = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$. Les solutions de $z^n = a$ sont

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Elles sont deux à deux distinctes et sont les sommets d'un polygone régulier de centre O.

Conséquence *Racines de l'unit*

Les solutions de $z^n = 1$ sont

$$\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Pour $n \geq 2$, leur somme est nulle.

7 Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

7.1 Racines carrées d'un complexe

Propriété

Soit $\Delta = A + iB \in \mathbb{C}$. Chercher $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$ revient à résoudre

$$x^2 - y^2 = A, \qquad 2xy = B, \qquad x^2 + y^2 = |\Delta|.$$

Si $\Delta \neq 0$, il existe exactement deux racines carrées opposées δ et $-\delta$.

7.2 Équation générale

Propriété

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Pour l'équation

$$az^2 + bz + c = 0,$$

on pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\delta^2 = \Delta$, alors :

- si $\Delta = 0$, l'unique solution est $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$;
- si $\Delta \neq 0$, les deux solutions sont $z_1 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$.

Remarque

Les relations de Viète restent valables :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

8 Transformations et similitudes directes

8.1 Transformations usuelles

Propriété

Translation

La translation de vecteur d'affixe u est caractérisée par

$$z' = z + u.$$

Propriété

Homothéti

L'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est caractérisée par

$$z' - \omega = k(z - \omega).$$

Propriété

Rotatio

La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ est caractérisée par

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

8.2 Similitude directe

Propriété

Toute transformation complexe de la forme

$$z' = az + b, \qquad a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C},$$

est une similitude directe de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$.

- Si $a = 1$, il s'agit d'une translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, elle possède un unique point fixe Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ et s'écrit $z' - \omega = a(z - \omega)$.

Conséquence *Composition*

Si $f(z) = az + b$ et $g(z) = cz + d$, alors

$$(g \circ f)(z) = ca\, z + (cb + d).$$

Les rapports se multiplient et les angles s'ajoutent modulo 2π.

9 Synthèse

Remarque *À retenir*

Pour choisir efficacement une forme :

- la forme algébrique convient aux sommes, conjugaisons et équations cartésiennes ;
- la forme trigonométrique ou exponentielle convient aux produits, quotients, puissances et racines ;
- $|z_B - z_A|$ traduit une distance et $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ traduit un angle orienté ;
- l'écriture $z' = az + b$ permet de reconnaître rapidement une similitude directe.