11

Calcul des probabilités – Sciences Mathématiques

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Modéliser une expérience finie, utiliser conditionnement et indépendance, construire une loi de variable aléatoire et appliquer la loi binomiale.

Table des matières

1 Dénombrement utile . . . 2
Principes fondamentaux . . . 2
2 Espace probabilisé fini . . . 2
Événements . . . 2
3 Probabilité conditionnelle . . . 2
Formule des probabilités composées . . . 3
Probabilités totales . . . 3
Formule de Bayes . . . 3
4 Indépendance . . . 3
5 Variable aléatoire discrète . . . 3
Transformation affine . . . 4
6 Loi binomiale . . . 4
Calculs usuels . . . 4
7 Méthode de résolution . . . 4
8 Méthodes de modélisation . . . 4
Arbre pondéré . . . 4
9 Variable aléatoire et loi binomiale . . . 4
10 Erreurs fréquentes . . . 4

1 Dénombrement utile

Propriété *Principes fondamentaux*

Si une procédure comporte successivement p choix puis q choix, elle produit pq résultats. Si deux ensembles finis A et B sont disjoints, alors $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B$.

Propriété

Pour $0 \leq k \leq n$, le nombre de choix de k objets parmi n est

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad C_n^k = C_n^{n-k}, \qquad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Le nombre d'arrangements ordonnés de k objets distincts parmi n est $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

2 Espace probabilisé fini

Définition

Une probabilité P sur un univers fini Ω associe à chaque événement A un nombre de $[0,1]$, avec $P(\Omega) = 1$ et additivité sur les événements incompatibles.

Définition *Événements*

L'événement contraire de A est $\overline{A}$. L'événement $A \cap B$ signifie que A et B sont réalisés simultanément, tandis que $A \cup B$ signifie qu'au moins l'un des deux est réalisé. Ils sont incompatibles lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Propriété

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A), \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

En situation d'équiprobabilité, $P(A) = \dfrac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega}$.

3 Probabilité conditionnelle

Définition

Si $P(A) > 0$, la probabilité de B sachant A est

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Ainsi $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$.

Propriété *Formule des probabilités composée*

Pour des événements $A_1, \dots, A_n$ tels que les probabilités conditionnelles soient définies,

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Sur un arbre pondéré, cette formule revient à multiplier les probabilités le long d'un chemin.

Propriété *Probabilités totale*

Si $(A_1, \dots, A_n)$ est une partition de Ω avec $P(A_i) > 0$, alors

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i).$$

La formule de Bayes s'obtient en divisant $P(A_i \cap B)$ par $P(B)$.

Propriété *Formule de Baye*

Si $(A_1, \dots, A_n)$ est une partition et $P(B) > 0$, alors

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}.$$

4 Indépendance

Définition

A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Lorsque $P(A) > 0$, cela équivaut à $P(B \mid A) = P(B)$.

L'incompatibilité et l'indépendance sont différentes : deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants.

Propriété

Si A et B sont indépendants, alors les couples $(A, \overline{B})$, $(\overline{A}, B)$ et $(\overline{A}, \overline{B})$ sont également indépendants.

5 Variable aléatoire discrète

Définition

Une variable aléatoire X associe un réel à chaque issue. Sa loi est donnée par les valeurs x_i et les probabilités $p_i = P(X = x_i)$, avec $\sum p_i = 1$.

Propriété

$$E(X) = \sum x_i p_i, \qquad V(X) = \sum (x_i - E(X))^2 p_i = E(X^2) - E(X)^2, \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

La fonction de répartition est $F_X(x) = P(X \leq x)$; elle est croissante, en escalier, continue à droite.

Propriété

Transformation affine

Pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$E(aX+b) = aE(X)+b, \qquad V(aX+b) = a^2V(X), \qquad \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X).$$

6 Loi binomiale

Propriété

On répète n fois, indépendamment, une épreuve ayant une probabilité de succès p. Si X compte les succès, alors $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p).$$

Propriété

Calculs usuels

Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors

$$P(X \geq 1) = 1-(1-p)^n, \qquad P(X \leq r) = \sum_{k=0}^{r} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Pour une probabilité « au moins », l'événement contraire permet souvent le calcul le plus court.

7 Méthode de résolution

1. Décrire précisément l'univers et les événements.
2. Justifier l'équiprobabilité ou les probabilités des branches.
3. Choisir dénombrement, arbre, probabilités totales ou loi binomiale.
4. Contrôler qu'une loi somme à 1 et que toute probabilité appartient à $[0,1]$.

8 Méthodes de modélisation

Méthode

Arbre pondéré

Sur chaque branche, inscrire une probabilité conditionnelle. Le produit le long d'un chemin donne la probabilité de l'intersection ; la somme des chemins incompatibles donne la probabilité de l'évènement. Pour remonter l'arbre, utiliser la formule de Bayes.

9 Variable aléatoire et loi binomiale

Méthode

Pour établir la loi de X, commencer par déterminer $X(\Omega)$, puis calculer $P(X=x)$ pour chaque valeur. Vérifier que la somme vaut 1. Si X compte les succès de n épreuves de Bernoulli indépendantes de même probabilité p, alors $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

10 Erreurs fréquentes

- $P(A \mid B)$ et $P(B \mid A)$ sont généralement différents.
- L'indépendance signifie $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, pas $A \cap B = \varnothing$.

- Une loi binomiale exige répétition, indépendance et probabilité de succès constante.
- Contrôler que toute loi de probabilité somme à 1.

À retenir

Une répétition n'est binomiale que si le nombre d'épreuves est fixé, les épreuves sont indépendantes, deux issues sont distinguées et la probabilité de succès reste constante.