SÉRIE D'EXERCICES

2ème Bac Sciences Mathématiques

lycee.mathtutor.ma

Rolle et accroissements finis

EXERCICE N°1

1. Appliquer Rolle à $f(x) = x^3 - 4x$ sur $[-2, 2]$ et déterminer tous les réels c possibles.
2. À l'aide du TAF, montrer que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{a}}|x - y|$ pour $x, y \geq a > 0$.
3. Montrer que $\sqrt{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$ pour tout $x \geq 0$.

EXERCICE N°2

Soit $f(x) = \sqrt{1+x}$ sur $[1, 2]$.

1. Montrer que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.
2. Montrer que $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|x - y|$ pour $x, y \in [1, 2]$.
3. Déterminer l'unique point fixe α de f dans $[1, 2]$.
4. Pour $u_0 \in [1, 2]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, établir une majoration de $|u_n - \alpha|$ et conclure.

EXERCICE N°3

On considère $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[1, 4]$.

1. Déterminer le coefficient directeur de la sécante joignant les points d'abscisses 1 et 4.
2. Justifier qu'il existe $c \in]1, 4[$ où la tangente est parallèle à cette sécante.
3. Déterminer exactement ce réel c.

EXERCICE N°4

Soit $P(x) = x^5 + 5x + 1$.

1. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ possède une solution dans $]-1, 0[$.
2. En supposant l'existence de deux solutions distinctes, appliquer Rolle et obtenir une contradiction.
3. En déduire que l'équation possède une unique solution réelle.

EXERCICE N°5

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. Montrer que si $f' = 0$ sur $]a, b[$, alors f est constante sur $[a, b]$.
2. Montrer que si $f' \geq m > 0$ sur $]a, b[$, alors $f(y) - f(x) \geq m(y - x)$ pour $a \leq x < y \leq b$.
3. En déduire qu'une telle fonction est injective.