Théorème de Rolle et accroissements finis – Sciences Mathématiques

06

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Appliquer Rolle et le TAF, encadrer des accroissements, démontrer des inégalités et établir des propriétés de monotonie ou d'unicité.

Table des matières

1 Théorème de Rolle 2
Rolle 2
Interprétation géométrique 2
2 Théorème des accroissements finis 2
TAF 2
Démonstration à partir de Rolle 2
3 Encadrement des accroissements 2
Inégalité des accroissements finis 2
4 Monotonie et constance 3
5 Applications aux inégalités 3
6 Applications aux suites et points fixes 3
7 Erreurs fréquentes 3

1 Théorème de Rolle

Propriété *Roll*

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $f(a)=f(b)$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Remarque *Interprétation géométrique*

Lorsque deux points de la courbe ont la même ordonnée, il existe entre eux un point où la tangente est horizontale. Les trois hypothèses doivent être vérifiées explicitement.

2 Théorème des accroissements finis

Propriété *TAF*

Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Remarque *Démonstration à partir de Rolle*

Posons

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Alors $g(a)=g(b)$. Rolle donne $g'(c)=0$, ce qui fournit la formule du TAF.

3 Encadrement des accroissements

Propriété

Si $m\le f'(t)\le M$ sur un intervalle I, alors, pour $x<y$ dans I,

$$m(y-x)\le f(y)-f(x)\le M(y-x).$$

Conséquence *Inégalité des accroissements fini*

Si $|f'|\le k$ sur I, alors

$$|f(y)-f(x)|\le k|y-x|$$

pour tous $x,y\in I$.

4 Monotonie et constance

Propriété

Sur un intervalle I :

- si $f' = 0$, alors f est constante ;
- si $f' > 0$, alors f est strictement croissante ;
- si $f' < 0$, alors f est strictement décroissante.

5 Applications aux inégalités

Méthode

Pour comparer $f(y)$ et $f(x)$, appliquer le TAF sur le segment d'extrémités x et y, puis encadrer $f'(c)$. Cette méthode évite de chercher explicitement le réel c.

6 Applications aux suites et points fixes

Propriété

Si $f(I) \subset I$ et $|f'| \leq k < 1$ sur I, alors f possède au plus un point fixe dans I. Pour $u_{n+1} = f(u_n)$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$$

dès que $\alpha = f(\alpha)$.

7 Erreurs fréquentes

- Rolle exige l'égalité $f(a) = f(b)$, contrairement au TAF.
- Continuité et dérivabilité doivent porter sur les intervalles exacts indiqués.
- Le réel c existe mais n'est généralement pas déterminé explicitement.

À retenir

Rolle produit une dérivée nulle ; le TAF relie l'accroissement d'une fonction à une valeur de sa dérivée.