SÉRIE D'EXERCICES

2ème Bac Sciences Mathématiques

lycee.mathtutor.ma

Structures algébriques

EXERCICE N°1

Sur $\mathbb{R}$, $x * y = x + y + 2xy$.

1. Vérifier que $*$ est une loi interne, commutative et associative.
2. Déterminer l'élément neutre et les éléments symétrisables.
3. Étudier la structure de $\mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$.
4. Pour $x \neq -1/2$, exprimer la puissance x^{*n} en fonction de x et de n.

EXERCICE N°2

Sur $I =]-1, +\infty[$, on définit $x \perp y = x + y + xy$.

1. Montrer que I est stable.
2. Étudier $\varphi : I \to \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = 1 + x$.
3. En déduire la structure de $(I, \perp)$.

EXERCICE N°3

1. Montrer que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Montrer que $U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
3. Déterminer les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$ engendrés par $\overline{2}$ et $\overline{3}$.

EXERCICE N°4

$\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+^*, \times)$ est définie par $\varphi(x) = e^{2x}$.

1. Montrer que φ est un morphisme.
2. Déterminer noyau et image.
3. Conclure qu'il s'agit d'un isomorphisme et déterminer l'isomorphisme réciproque.

EXERCICE N°5

On pose $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $E = \{M(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que E est stable pour $+$ et $\times$.
2. Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.
3. Déterminer les éléments inversibles.
4. Construire un isomorphisme entre $\mathbb{C}$ et E.

EXERCICE N°6

On considère

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

1. Montrer que G est stable pour la multiplication matricielle.
2. Déterminer l'inverse de tout élément de G.
3. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe non commutatif.
4. Étudier le sous-ensemble obtenu lorsque $x = y - 1$.