12 Structures algébriques – Sciences Mathématiques

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Étudier lois internes, groupes, sous-groupes, morphismes, anneaux, corps et transport de structure.

Table des matières

1 Lois de composition interne . . . 2
Loi induite et puissances . . . 2
2 Groupes et sous-groupes . . . 2
Critère de sous-groupe . . . 2
3 Morphismes . . . 2
4 Anneaux . . . 3
Diviseurs de zéro . . . 3
5 Corps . . . 3
6 Transport de structure . . . 3
7 Méthodes de vérification . . . 3
8 Erreurs fréquentes . . . 4

1 Lois de composition interne

Définition

Une loi de composition interne sur E est une application $* : E \times E \to E$. Une partie $A \subset E$ est stable si $x, y \in A$ implique $x * y \in A$.

Propriété

Une loi peut être associative, commutative, posséder un élément neutre, des éléments symétrisables et un élément absorbant. Lorsqu'ils existent, l'élément neutre et le symétrique d'un élément sont uniques.

Propriété *Loi induite et puissance*

Si $A \subset E$ est stable pour $*$, la restriction de $*$ à A est une loi interne sur A, appelée loi induite. Dans un groupe d'élément neutre e, on définit

$$x^0 = e, \qquad x^{n+1} = x^n * x \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad x^{-n} = (x^{-1})^n.$$

En notation additive, on écrit $nx = x + \cdots + x$ et $(-n)x = n(-x)$.

2 Groupes et sous-groupes

Définition

$(G, *)$ est un groupe si $*$ est associative, possède un élément neutre et si tout élément possède un symétrique. Le groupe est commutatif lorsque $*$ l'est.

Propriété *Critère de sous-group*

Une partie non vide H de G est un sous-groupe si

$$\forall x, y \in H, \qquad x * y^{-1} \in H.$$

Dans un groupe additif, le critère devient $x - y \in H$.

3 Morphismes

Définition

$f : (G, *) \to (G', \circ)$ est un morphisme si

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y).$$

Son noyau est $\ker f = \{x : f(x) = e'\}$ et son image est $\operatorname{Im} f = f(G)$.

Propriété

$\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-groupes. Le morphisme f est injectif si, et seulement si, $\ker f = \{e\}$. Un morphisme bijectif est un isomorphisme.

4 Anneaux

Définition

Un anneau $(A, +, \times)$ est tel que $(A, +)$ est un groupe commutatif, $\times$ est associative et distributive sur $+$. Il est unitaire lorsque $\times$ possède une unité, et commutatif lorsque $\times$ est commutative.

Définition *Diviseurs de zéro*

Un élément non nul a est un diviseur de zéro s'il existe $b \neq 0$ tel que $ab = 0$ ou $ba = 0$. Un anneau commutatif sans diviseur de zéro est intègre.

Propriété

Dans un anneau intègre, $ab = 0$ implique $a = 0$ ou $b = 0$. $M_2(\mathbb{R})$ est un anneau unitaire non commutatif et possède des diviseurs de zéro.

5 Corps

Définition

Un corps est un anneau unitaire dans lequel tout élément non nul est inversible. Il est commutatif lorsque sa multiplication l'est.

Propriété

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps commutatifs. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si, et seulement si, n est premier.

6 Transport de structure

Propriété

Si $f : E \to F$ est bijective et si $*$ est une loi sur E, on peut définir sur F

$$u \circ v = f\big(f^{-1}(u) * f^{-1}(v)\big).$$

Les propriétés algébriques de $*$ sont alors transportées à $\circ$.

7 Méthodes de vérification

Méthode

Pour démontrer qu'un ensemble est un groupe : stabilité, associativité, neutre, symétriques. Pour un sous-groupe, utiliser de préférence le critère $xy^{-1} \in H$. Pour un morphisme, vérifier la compatibilité avec les lois avant de calculer noyau et image.

8 Erreurs fréquentes

- Une loi n'est pas interne tant que la stabilité n'est pas établie.
- L'élément neutre dépend de la loi.
- Un anneau n'est pas nécessairement commutatif ni intègre.
- Ne pas confondre morphisme injectif et morphisme surjectif.

À retenir

Toujours distinguer l'ensemble, ses lois et les propriétés de ces lois.