SÉRIE D'EXERCICES

2ème Bac Sciences Mathématiques

lycee.mathtutor.ma

Suites numériques

EXERCICE N°1

Calculer les limites :

1. $\dfrac{4n^3 - n + 2}{2n^3 + 5n}$;
2. $\sqrt{n^2 + 4n} - n$;
3. $n^3 \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$;
4. $n\left(\sqrt{1 + \dfrac{2}{n}} - 1\right)$;
5. $\sqrt[n]{7}$;
6. $\dfrac{2n + (-1)^n}{n + 1}$.

EXERCICE N°2

Pour chaque suite, étudier monotonie et bornes, puis conclure sur la convergence :

$$u_n = \frac{n}{n+1}, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, \qquad w_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

EXERCICE N°3

On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}$.

1. Montrer que $1 \leq u_n \leq 3$ pour tout n.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Justifier sa convergence et déterminer sa limite.
4. Établir une estimation de $|u_{n+1} - \ell|$ en fonction de $|u_n - \ell|$.

EXERCICE N°4

$u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 2$.

1. Déterminer le point fixe α.
2. Montrer que $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique.
3. Exprimer u_n, étudier sa monotonie et calculer sa limite.
4. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

EXERCICE N°5

$u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3}{u_n + 2}$.

1. Montrer que $3 < u_n \leq 4$.
2. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
3. Déterminer la limite.
4. Trouver une transformation $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ rendant (v_n) géométrique, où α, β sont les points fixes.

EXERCICE N°6

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

1. Étudier $u_{n+1} - u_n$ et $v_{n+1} - v_n$.
2. Calculer $v_n - u_n$.
3. Les suites sont-elles adjacentes ? Justifier.
4. Donner un encadrement de leur limite commune lorsqu'elle existe.

EXERCICE N°7

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}.$$

1. Décomposer $\dfrac{1}{k(k+2)}$ en éléments simples.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Étudier la monotonie et les bornes de (u_n).
4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE N°8

Soit $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$ sur $]0, +\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 > \sqrt{3}$.

1. Montrer que $u_n > \sqrt{3}$.
2. Montrer que (u_n) est décroissante.
3. Déterminer sa limite.
4. Établir $u_{n+1} - \sqrt{3} = \dfrac{(u_n - \sqrt{3})^2}{2u_n}$ et commenter la vitesse de convergence.

EXERCICE N°9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1. Calculer F_0, F_1, F_2, F_3.
2. Montrer que $F_0 F_1 \cdots F_n = F_{n+1} - 2$.
3. En déduire que deux nombres de Fermat distincts sont premiers entre eux.
4. Montrer que la suite (F_n) est croissante et non majorée.

EXERCICE N°10

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0$.

1. Déterminer les réels r tels que (r^n) vérifie la relation.
2. Écrire u_n sous la forme $A2^n + B2^{-n}$.
3. Déterminer A, B, puis étudier la limite de $u_n/2^n$.