02 Suites numériques – Sciences Mathématiques

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Étudier convergence et divergence, exploiter l'ordre, traiter les suites récurrentes et utiliser les suites adjacentes.

Table des matières

1 Généralités et limites de référence . . . 2
Suites arithmétiques et géométriques . . . 2
Formulation quantifiée . . . 2
Unicité de la limite . . . 2
Limites usuelles . . . 2
2 Opérations, ordre et comparaison . . . 3
Formes indéterminées . . . 3
Croissances comparées . . . 3
3 Monotonie et convergence . . . 3
Convergence monotone . . . 3
Limite et ordre . . . 3
4 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . 3
Sens de variation transmis par f . . . 4
Contraction . . . 4
5 Suites arithmético-géométriques . . . 4
6 Suites homographiques . . . 4
7 Suites adjacentes . . . 4
Encadrement de la limite . . . 5
8 Méthodes fondamentales . . . 5
Étudier une suite récurrente . . . 5
9 Sommes et moyennes de suites . . . 5
Théorème de Cesàro . . . 5
10 Erreurs fréquentes . . . 5

1 Généralités et limites de référence

Une suite réelle est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, notée (u_n). Elle peut être définie explicitement ou par récurrence.

Définition

La suite (u_n) est :

- *majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout n ;
- *minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq u_n$ pour tout n ;
- *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe $A > 0$ tel que $|u_n| \leq A$ pour tout n.

Un majorant ou un minorant n'est pas nécessairement une valeur prise par la suite.

Propriété *Suites arithmétiques et géométriques*

Si $u_{n+1} = u_n + r$, alors $u_n = u_p + (n-p)r$ et

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}.$$

Si $u_{n+1} = qu_n$, alors $u_n = u_p q^{n-p}$ et, pour $q \neq 1$,

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

Définition

(u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Elle diverge si elle n'admet aucune limite finie.

Définition *Formulation quantifiée*

$$u_n \longrightarrow \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

De même, $u_n \to +\infty$ signifie que, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang N tel que $u_n > A$ pour tout $n \geq N$.

Propriété *Unicité de la limit*

Une suite convergente possède une seule limite. En effet, si $\ell \neq \ell'$, les intervalles centrés en ℓ et ℓ' de rayon $|\ell - \ell'|/3$ sont disjoints, alors que tous les termes de rang suffisamment grand devraient appartenir aux deux.

Propriété *Limites usuelle*

Pour $r > 0$, $q \in]0,1[$ et $a > 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^r = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^r} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} q^n = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

De plus, une suite convergente est bornée et sa limite est unique.

2 Opérations, ordre et comparaison

Propriété

Si $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$, les règles algébriques de somme, produit et quotient s'appliquent lorsque le quotient est défini. En particulier :

- si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si les deux suites convergent, alors $\ell \leq \ell'$;
- si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $u_n, w_n \to \ell$, alors $v_n \to \ell$;
- si $u_n \geq v_n$ et $v_n \to +\infty$, alors $u_n \to +\infty$.

Remarque *Formes indéterminées*

Les écritures $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$ ne donnent aucune conclusion. Il faut transformer l'expression : factorisation par le terme dominant, conjugaison, mise au même dénominateur ou encadrement.

Propriété *Croissances comparée*

Pour $a > 1$, $r > 0$ et $q \in]0,1[$:

$$\frac{n^r}{a^n} \longrightarrow 0, \qquad n^r q^n \longrightarrow 0, \qquad \frac{\ln n}{n^r} \longrightarrow 0.$$

3 Monotonie et convergence

Définition

(u_n) est croissante si $u_{n+1} \geq u_n$, décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$, et monotone si elle est croissante ou décroissante.

Propriété *Convergence monoton*

Toute suite croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge. Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$; une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Propriété *Limite et ordr*

Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $u_n \to \ell$, $v_n \to \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$. Si $u_n \leq v_n$ et $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$. Une suite convergente est bornée, mais la réciproque est fausse.

4 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Propriété

Soit I un intervalle fermé tel que $f(I) \subset I$. Si $u_0 \in I$, alors $u_n \in I$ pour tout n. Si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue sur I, alors $\ell = f(\ell)$.

Propriété *Sens de variation transmis par*

Supposons $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$.

- Si f est croissante sur I, le signe de $u_1 - u_0$ se conserve : la suite est monotone.
- Si f est décroissante sur I, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont souvent plus simples à étudier, car elles sont engendrées par la fonction croissante $f \circ f$.

Dans tous les cas, l'intervalle stable doit être établi avant d'utiliser ces propriétés.

Remarque

L'équation $\ell = f(\ell)$ fournit seulement les limites possibles. Il faut d'abord établir la convergence.

Propriété *Contractio*

Si $f(I) \subset I$ et s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ sur I, alors f possède un unique point fixe $\alpha \in I$ et toute suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in I$ converge vers α. De plus,

$$|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|.$$

5 Suites arithmético-géométriques

Propriété

Si $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$, le point fixe est $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$. La suite $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison a :

$$u_n = \alpha + a^n(u_0 - \alpha).$$

6 Suites homographiques

On considère $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$, les dénominateurs étant non nuls. Si l'application possède deux points fixes distincts α et β, on cherche une suite auxiliaire

$$v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}.$$

Un calcul direct permet souvent d'obtenir $v_{n+1} = qv_n$. L'étude se ramène alors à une suite géométrique.

7 Suites adjacentes

Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et $v_n - u_n \to 0$.

Propriété

Deux suites adjacentes convergent vers une même limite ℓ et, lorsque u_n est croissante et v_n décroissante, $u_n \leq \ell \leq v_n$.

Propriété *Encadrement de la limit*

Si (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et $v_n - u_n \to 0$, alors $u_n \leq v_n$ pour tout n et leur limite commune ℓ vérifie

$$u_n \leq \ell \leq v_n.$$

Ainsi, $v_n - u_n$ fournit directement une estimation de l'erreur.

8 Méthodes fondamentales

Méthode *Étudier une suite récurrente*

Pour $u_{n+1} = f(u_n)$, la rédaction complète suit quatre étapes :

1. trouver un intervalle fermé I tel que $u_0 \in I$ et $f(I) \subset I$;
2. comparer $f(x)$ à x sur I, ou étudier f' pour obtenir la monotonie ;
3. appliquer le théorème de convergence monotone ;
4. résoudre $f(\ell) = \ell$ et conserver la seule solution appartenant à I.

La dernière étape ne doit jamais précéder la preuve de convergence.

9 Sommes et moyennes de suites

Propriété *Théorème de Cesàr*

Si $u_n \to \ell$, alors la moyenne $m_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$ converge vers ℓ. Plus généralement, si $u_n \to +\infty$, alors $m_n \to +\infty$.

Remarque

Pour une somme télescopique, écrire le terme général sous la forme $a_k - a_{k+1}$ avant de sommer. Par exemple, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

10 Erreurs fréquentes

- Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente : $(-1)^n$ est bornée et divergente.
- Une relation $u_{n+1} - u_n \to 0$ ne prouve pas la convergence.
- Dans $u_{n+1} = f(u_n)$, résoudre $f(x) = x$ donne des limites possibles, pas la convergence.
- Pour une suite homographique, vérifier que les dénominateurs ne s'annulent jamais.

À retenir

Encadrement, monotonie, intervalle stable et point fixe sont les quatre outils essentiels. L'identification d'une limite ne remplace jamais la preuve de convergence.