MATH TUTOR LYCÉE

Devoir libre n°2, semestre 1 (version 1)

Devoirs à la maison · 2ème Bac · Semestre 1

Matière : Mathématiques	**Niveau :** 2ème Bac SX BIOF	**Durée :** non précisée
Semestre : 1	**Barème :** non précisé	**Calculatrice :** autorisée

Instructions :
L'usage de la calculatrice est autorisé.

EXERCICE N°1

Soit (u_n) une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{5}{4}, \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n + 2}, \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.

a. Montrer que : $u_{n+1} = 3 - \dfrac{6}{u_n + 2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer par récurrence que : $1 < u_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.

a. Montrer que : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n(u_n - 1)}{u_n + 2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que (u_n) est décroissante, puis déduire qu'elle est convergente.

3.

a. Montrer que : $0 < u_{n+1} - 1 \leq \dfrac{2}{3}(u_n - 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b. En déduire que : $0 < u_n - 1 \leq \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4. Soit (v_n) une suite numérique définie par :

$$v_n = \frac{2u_n}{1 - u_n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique en déterminant sa raison et son premier terme v_0.

b. Exprimer v_n en fonction de n, puis déduire u_n en fonction de n.

c. Calculer à nouveau $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE N°2

I) Soit f la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 4\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 5$$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, puis donner une interprétation géométrique du résultat.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis déduire la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

3.

a. Montrer que $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x\sqrt{x}}$, pour tout x dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

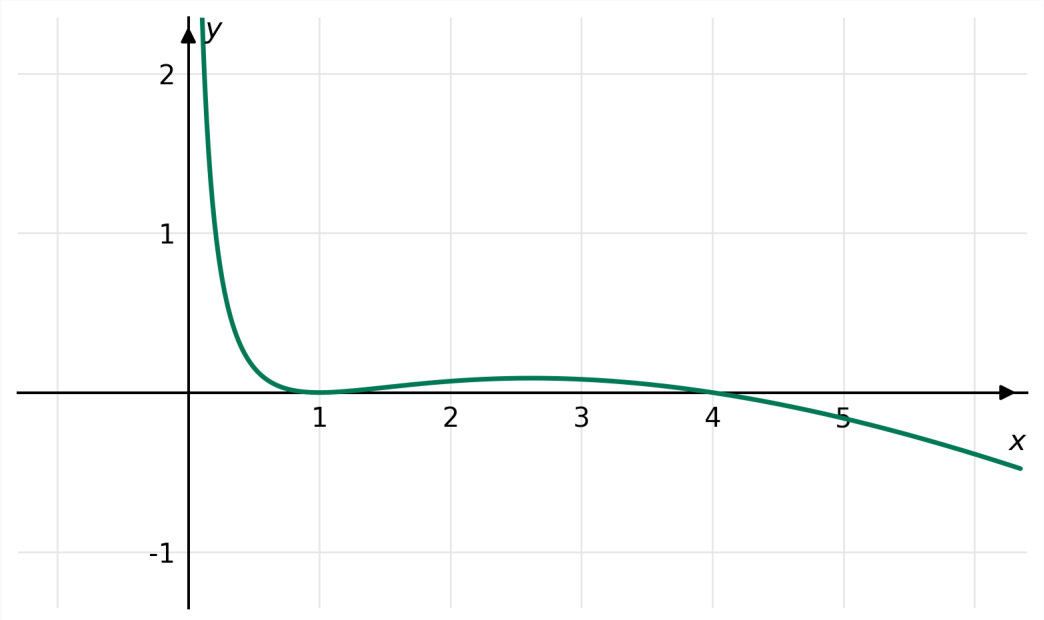
c. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.

4.

a. $f''(x) = \dfrac{3-2x}{2x^2\sqrt{x}}$, pour tout x dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b. Étudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ et déterminer l'abscisse du point d'inflexion.

5. Soit g une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$. Le graphique ci-dessous représente la courbe $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.



a. Calculer $g(4)$, puis déterminer graphiquement le signe de g sur $]0\,;+\infty[$.

b. Déduire la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et de la droite (T) sur $]0\,;+\infty[$.

6. Soit h la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [1\,;+\infty[$.

a. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b. Calculer $h(1)$, puis montrer que h^{-1} est dérivable en 1.

c. Calculer $(h^{-1})'(1)$.

7. Construire les courbes $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ et la droite (T) dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

On prend $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \approx 0{,}66$ et $f\left(\dfrac{3}{2}\right) \approx 1{,}53$.

8. Déterminer graphiquement $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h^{-1}(x)}{x}$.

II) Soit (u_n) une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = f(u_n), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 4$, pour tout n dans $\mathbb{N}$.

2. Montrer que (u_n) est croissante (utiliser la question **I) 5) b)**).

3. Déduire que (u_n) est convergente, puis calculer sa limite.