MATH TUTOR LYCÉE

Devoir surveillé n°2, Semestre 1 : Étude de fonctions

Contrôles · 2ème Bac · Semestre 1

Matière : Mathématiques	**Niveau :** 2ème Bac SX BIOF	**Durée :** 2 heures
Semestre : 1	**Barème :** 20 points	**Calculatrice :** autorisée

N°	Domaine	Barème
Partie I	Étude d'une fonction, réciproque et suite	14 pts
Partie II	Suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$	6 pts
	Total	**20 pts**

Instructions : le candidat peut traiter les questions dans l'ordre qui lui convient. L'usage de la calculatrice est autorisé.

PARTIE I

On considère la fonction numérique f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(8x+6)\sqrt{x} - 1}{2x} - \frac{11}{2},$$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, puis donner une interprétation géométrique du résultat. (1 pt)

b) Vérifier que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$:

$$f(x) = 4\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} - \frac{11}{2},$$

puis montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on déterminera la direction. (1,5 pt)

2. Montrer que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{4x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 1}{2x^2}.$$

(1 pt)

3. En exploitant le tableau de variations ci-dessous de la fonction dérivée f' sur $]0\,;\,+\infty[$ (on donne $\beta \approx 1{,}4$ et $f'(\beta) \approx 1{,}04$) :

x	0	$\frac{1}{4}$	β	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+\infty$ ↘	0 ↗	$f'(\beta)$ ↘	0

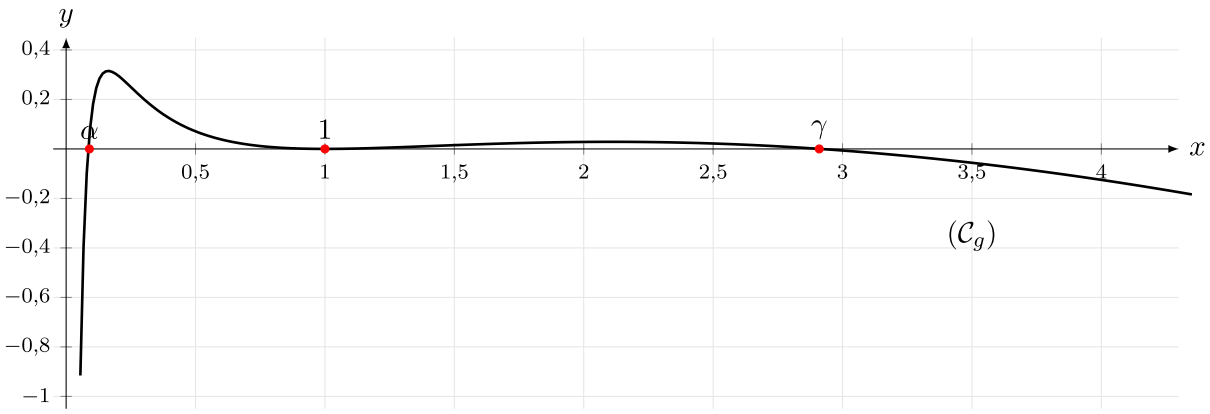
a) Prouver que f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, puis dresser son tableau de variations. (1,5 pt)

b) Donner le tableau de signe de la dérivée seconde f'' sur $]0\,;\,+\infty[$. (0,5 pt)

c) En déduire la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ et les coordonnées de ses points d'inflexion (calculer $f\left(\frac{1}{4}\right)$). (1 pt)

4. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$, et soit (Δ) la droite d'équation $y = x$. La courbe $(\mathcal{C}_g)$ de g est donnée ci-dessous (repère

orthogonal) ; elle coupe l'axe des abscisses en α, en 1 et en γ ($\alpha \approx 0{,}09$ et $\gamma \approx 2{,}91$).



a) Par une lecture graphique, déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$. (1 pt)

b) En déduire la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de la droite (Δ). (0,5 pt)

c) Calculer $f(1)$ et $f'(1)$, puis montrer que (Δ) est tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point $A(1\,;\,1)$. (1 pt)

5. a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. (1 pt)

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 sur $]0\,;\,+\infty[$ et que $\dfrac{1}{16} < x_0 < \dfrac{1}{9}$. (1,5 pt)

c) Montrer que f^{-1} est dérivable en 1, puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$. (1 pt)

6. Construire $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ et (Δ) dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ (on prend $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm ; $\alpha \approx 0{,}09$; $x_0 \approx 0{,}08$; $\beta \approx 1{,}4$; $f(\beta) \approx 1{,}42$ et $\gamma \approx 2{,}91$). (1,5 pt)

PARTIE II

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1. (0,5 pt)

2. Montrer par récurrence que $\frac{1}{4} \leq u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (1,5 pt)

3. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante (on pourra utiliser la question **4. a)** de la Partie I). (1,5 pt)

4. En déduire que (u_n) est convergente, puis calculer sa limite. (2,5 pt)