MATH TUTOR LYCÉE

Devoir surveillé n°2, Semestre 1 : Version 2

Contrôles · 2ème Bac · Semestre 1

Matière : Mathématiques	**Niveau : 2ème Bac SX BIOF**	**Durée : 2 heures**
Semestre : 1	**Barème :** 20 points	**Calculatrice :** autorisée

Instructions : le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient. L'usage de la calculatrice est autorisé.

EXERCICE N°1 (8 POINTS)

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$:

$$u_{n+1} = \frac{3 + u_n}{5 - u_n}.$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 1 \leq u_n \leq 3$. (1,5 pt)

2)

a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ :\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$. (0,5 pt)

b) Étudier la monotonie de (u_n). (0,5 pt)

c) En déduire qu'elle est convergente. (0,5 pt)

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{3 - u_n}{u_n - 1}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme. (1 pt)

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. (1,5 pt)

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1},$$
$$T_n = \frac{1}{u_0 - 1} + \frac{1}{u_1 - 1} + \cdots + \frac{1}{u_{n-1} - 1}.$$

a) Exprimer S_n en fonction de n, et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$. (1 pt)

b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{1}{2}(1 + v_n)$. (1 pt)

c) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ T_n = \dfrac{1}{2}(n - 1 + 2^n)$, et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$. (0,5 pt)

EXERCICE N°2 (12 POINTS)

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = -x - 1 + \sqrt{\frac{x+3}{x+1}}.$$

1. Montrer que $D_f =]-\infty\,;\,-3] \cup]-1\,;\,+\infty[$. (1 pt)

2. Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ et donner une interprétation géométrique. (1 pt)

3. Calculer la limite de $f(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$. (1 pt)

4.

a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$. (1 pt)

b) Vérifier que :

$$(\forall x \in]-\infty\,;\,-3] \cup]-1\,;\,+\infty[) \quad f(x) + x = \frac{2}{(x+1)\left(\sqrt{\dfrac{x+3}{x+1}} + 1\right)}.$$

(0,5 pt)

c) En déduire la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (D). (0,5 pt)

5. Étudier la dérivabilité de f à gauche en -3 et donner une interprétation géométrique. (1 pt)

6.

a) Montrer que :

$$(\forall x \in]-\infty\,;\,-3[\cup]-1\,;\,+\infty[) \quad f'(x) = -\left(\frac{1}{(x+1)^2\sqrt{\dfrac{x+3}{x+1}}} + 1\right).$$

(1 pt)

b) Dresser le tableau de variations de f sur D_f. (0,5 pt)

7. Donner l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0. (1 pt)

8. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, et que $0 < \alpha < 1$. (1 pt)

9. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$. (0,5 pt)

10. Soit g la restriction de f sur $]-1\,;\,+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. (0,5 pt)

b) Montrer que g^{-1} est dérivable en 0, puis montrer que $(g^{-1})'(0) = \dfrac{-(\alpha+1)^3}{1+(\alpha+1)^3}$. (1 pt)

c) Tracer $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$. (0,5 pt)