MATH TUTOR LYCÉE

Version 10

Contrôles · 2ème Bac Sciences Mathématiques · Semestre 1

Matière : Mathématiques	**Niveau :** 2ème Bac SM	**Durée :** 2 heures
Semestre : 1	**Barème :** 20 points	**Année :** 2026/2027

Instructions :

Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

EXERCICE N°1 : LIMITES

Partie I. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$ *(0,5 pt)*
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{x}$ *(0,5 pt)*
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[n]{x^2+x+1}-x\right) \quad (n\in\mathbb{N},\ n>2)$ *(0,5 pt)*
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt[n]{x^2+1}+x\right) \quad (n\in\mathbb{N},\ n>2)$ *(0,5 pt)*

Partie II. Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}$ *(2 pt)*

EXERCICE N°2 : FONCTION ARC TANGENTE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$ et $f(x)=$

$\arctan\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt[3]{x}\right)\right)$; si $x > 0$.

1. **a)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. *(0,5 pt)*

   b) Justifier soigneusement que f est continue sur $\mathbb{R}^+$. *(0,75 pt)*

2. **a)** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad \exists ! \, \theta \in \left]0 \, ; \frac{\pi}{2}\right[\; ; \; \sqrt[3]{x} = \tan\theta$. *(0,75 pt)*

   b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \; ; \; f(x) = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\sqrt[3]{x}$. *(0,5 pt)*

3. **a)** Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera. *(0,5 pt)*

   b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. *(0,5 pt)*

4. Calculer les deux limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f^{-1}(x) - 1}{x}$. *(1,5 pt)*

EXERCICE N°3 : SUITES ADJACENTES (SANS UTILISER LA FONCTION)

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = k \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = k + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

On considère les deux suites (x_n) et (y_n) définies par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad k \leq u_n < k+1$. *(1 pt)*

2. **a)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = k + \frac{x_n}{kx_n + 1}$. *(0,75 pt)*

   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_{n+1} = k + \frac{y_n}{ky_n + 1}$. *(0,75 pt)*

   c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < y_n$. *(0,5 pt)*

3. **a)** Montrer que la suite (x_n) est croissante. *(0,75 pt)*
   b) En déduire que la suite (y_n) est décroissante. *(0,75 pt)*
   c) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes. *(0,5 pt)*
4. **a)** Déterminer la limite α de la suite (x_n). *(0,5 pt)*
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\alpha k}\right)^n |k - \alpha|$. *(0,75 pt)*
   c) En déduire que $\lim u_n = \lim x_n$. *(0,75 pt)*

EXERCICE N°4 : FONCTIONS ET CONTINUITÉ

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$, croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction numérique g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

1. Soit a un élément de $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que : *(1 pt)*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* - \{a\}$$
$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{1}{x} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \frac{f(a)}{ax}$$

2. En déduire que si g est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. *(1 pt)*

EXERCICE N°5 : ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et n un entier naturel non nul.

1. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f\left(x + \frac{1}{n}\right) > f(x)$.

   a) Montrer que $(\forall k \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f\left(x + \frac{k}{n}\right) > f(x)$. *(1 pt)*

   b) En déduire que $f(1) > f(0)$. *(0,25 pt)*

2. On suppose que $f(1) = f(0)$ et que f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad f\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha)$. *(0,75 pt)*