06

Les polynômes

Nidal SABI

Table des matières

1 Définition et vocabulaire 2
2 Égalité de deux polynômes 2
3 Opérations sur les polynômes 3
4 Division euclidienne par $x - \alpha$ 3
4.1 Théorème de la division 3
4.2 Méthode de Horner 4
5 Racine d'un polynôme et factorisation 4

Objectifs de la leçon

- Reconnaître un polynôme et déterminer son degré et ses coefficients.
- Effectuer des opérations sur les polynômes et utiliser leur égalité.
- Effectuer la division euclidienne d'un polynôme par $x - \alpha$ et appliquer la méthode de Horner.
- Caractériser une racine et factoriser un polynôme.

1 Définition et vocabulaire

Définition 1

On appelle **polynôme** (ou *fonction polynomiale*) toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$P(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0,$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels appelés **coefficients** de P.

Le terme $a_k\,x^k$ est appelé *terme de degré k* et a_k *coefficient du terme de degré k*.

Définition 2

- Le polynôme P tel que tous les coefficients sont nuls est appelé **polynôme nul**, noté 0.
- Si $a_n \neq 0$, l'entier n est appelé le **degré** de P, et l'on note $\mathrm{d}^\circ P = n$.
- Le coefficient a_n (correspondant au plus haut degré) est appelé **coefficient dominant**.
- Le polynôme nul *n'a pas de degré* (par convention).

Exemple 1

Donner le degré et le coefficient dominant de $P(x) = 2x^3 - 5x + 1$, $Q(x) = -4x^2 + x$, $R(x) = 7$ et $S(x) = 0$.

Application 1

On donne $P(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$ et $Q(x) = -x^3 + x$.

1. Donner le degré et le coefficient dominant de P, puis de Q.
2. Calculer $P(1)$ et $Q(-1)$.

2 Égalité de deux polynômes

Théorème 1

Soient P et Q deux polynômes. Alors $P = Q$ si et seulement si les coefficients de chaque puissance de x sont égaux deux à deux, en complétant au besoin par des coefficients nuls. En particulier, si P et Q sont non nuls et égaux, alors $\mathrm{d}^\circ P = \mathrm{d}^\circ Q$.

Remarque

Méthode d'identification : si $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut identifier les coefficients de chaque puissance de x.

Exemple 2

Déterminer a, b, c tels que $a(x^2+1) + b(x-1) + c = 2x^2 - x + 3$ pour tout réel x.

Application 2

On pose $P(x) = (a-1)x^2 + 3x + b$ et $Q(x) = 2x^2 + cx - 5$, où a, b et c sont des réels.

1. Traduire l'égalité $P = Q$ par un système de conditions sur a, b et c.
2. En déduire les valeurs de a, b et c.

3 Opérations sur les polynômes

Définition 3

Soient P et Q deux polynômes non nuls.

- La **somme** $P + Q$ est obtenue en additionnant les coefficients des termes de même degré.
- Le **produit** $P \times Q$ est obtenu en développant.

propriété 1

Soient P et Q deux polynômes non nuls.

- $\mathrm{d}^\circ(P+Q) \leq \max(\mathrm{d}^\circ P, \mathrm{d}^\circ Q)$ (lorsque $P+Q$ n'est pas nul).
- $\mathrm{d}^\circ(P \times Q) = \mathrm{d}^\circ P + \mathrm{d}^\circ Q$.

Exemple 3

Pour $P(x) = 2x^2 - x + 3$ et $Q(x) = x^3 + x - 1$, calculer $P + Q$ et PQ, puis prévoir leurs degrés.

Application 3

On donne $P(x) = 2x^2 - x + 3$ et $Q(x) = x^2 + 4x - 1$.

1. Calculer $P + Q$ et $P - Q$.
2. Calculer $P \times Q$.
3. Donner le degré de chacun des trois polynômes obtenus.

4 Division euclidienne par $x - \alpha$

4.1 Théorème de la division

Théorème 2

Soient P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Il existe un *unique* polynôme Q et un *unique* réel r tels que :

$$P(x) = (x - \alpha)\, Q(x) + r.$$

Q est appelé le **quotient** et r le **reste** de la division.

Propriété 2

Avec les notations du théorème :

$$r = P(\alpha).$$

Exemple 4

Effectuer la division euclidienne de $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 3$ par $x - 2$, puis vérifier le reste à l'aide de $P(2)$.

4.2 Méthode de Horner

Remarque

Schéma de Horner pour diviser $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ par $x - \alpha$: on dispose les coefficients dans un tableau, et l'on calcule de proche en proche.

À faire : compléter le schéma de Horner de $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 3$ par $x - 2$, puis en déduire le quotient et le reste. Contrôler le reste en calculant $P(2)$.

Application 4

Soit $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

1. Vérifier que $P(2) = 0$.
2. Effectuer la division euclidienne de P par $x - 2$.
3. En déduire une factorisation de $P(x)$, puis résoudre $P(x) = 0$.

5 Racine d'un polynôme et factorisation

Définition 4

Un réel α est une **racine** (ou un *zéro*) du polynôme P si :

$$P(\alpha) = 0.$$

Théorème 3

Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$. Les énoncés suivants sont équivalents :

1. α est une racine de P.
2. $P(\alpha) = 0$.
3. $(x - \alpha)$ divise $P(x)$, c'est-à-dire il existe un polynôme Q tel que :

$$P(x) = (x - \alpha)\, Q(x).$$

Exemple 5

Soit $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$. Vérifier que 1 est une racine, appliquer la méthode de Horner, puis factoriser complètement P.

PROPRIÉTÉ 3

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines réelles distinctes.

APPLICATION 5

Soit $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

1. Vérifier que -1 est une racine de P.
2. Factoriser $P(x)$ par $(x + 1)$.
3. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

EXERCICE

Effectuer la division euclidienne de $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x - 1$ par $D(x) = x - 1$.